Referenzen

Emil Post (1897 – 1954): *A variant of a recursively unsolvable problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 264–268, (Definition PCP und Beweis der Unentscheidbarkeit.)

Uwe Schöning (und andere Lehrbücher) (ca. 1987): ein PCP(4,3) mit Länge 66

Tero Harjo und Juhani Karhumäki: *Morphisms*, in Handbook of Formal Languages (1996), Entscheidbarkeit PCP(2), Unentsch. PCP(9)

Yuri Matiyasevich und Geraud Senizergues: *Decision Problems for Semi–Thue–Systems with a few Rules*, (LICS 1996): Unentsch. PCP(7)

Richard J. Lorentz: *Creating Difficult Instances of the PCP*, (2000) Experimente und Rekorde für PCP($3, \leq 4$), PCP($4, \leq 4$)

Interessante Instanzen

klein, lösbar, kürzeste Lösung ist lang

Absicht: finde berechenbares $l(n, w)$ mit

$$\forall \Psi \in \mathsf{PCP}(n, w) :$$
$$\emptyset \neq E(\Psi) \iff \emptyset \neq E(\Psi) \cap \Sigma^{\leq l(n,w)}$$

für $n = 2$ und $n = 3$.

Vermutung: $l(2, w) \leq 2 \cdot w, \quad l(3, w) \leq 3^{w+1}$

uninteressant Instanzen

kurze Lösung (z. B. $\exists i : u_i = v_i$)

keine Lösung (Beispiele folgen)

strukturgleich zu bereits betrachteter Instanz

Äquivalenz und Isomorphie

Äquivalenz: $(h_1, g_1) \sim (h_2, g_2)$,
wenn $\emptyset = E(h_1, g_1) \leftrightarrow \emptyset = E(h_2, g_2)$

Isomorphie: $\cong \;=\; (\cong_1 \cup \cong_2 \cup \cong_3 \cup \cong_4)^*$

Satz: $(h_1, g_1) \cong (h_2, g_2) \Rightarrow (h_1, g_1) \sim (h_2, g_2)$.

Idee: Isomorphie ist hinreichend für Äquivalenz, nur nicht–isomorphe Instanzen betrachten

- Morphismen vertauschen: $(h, g) \cong_1 (g, h)$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 110 \\ 1 & 110 & 0 \end{pmatrix} \cong_1 \begin{pmatrix} 1 & 110 & 0 \\ 0 & 1 & 110 \end{pmatrix}$

- Bild spiegeln: $(h, g) \cong_2 (\overline{h}, \overline{g})$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 110 \\ 1 & 110 & 0 \end{pmatrix} \cong_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 011 \\ 1 & 011 & 0 \end{pmatrix}$

Isomorphie (II)

- Original permutieren:

für jede Permutation $\pi : \Sigma \to \Sigma$:

$(h, g) \cong_3 (h \circ \pi, g \circ \pi)$

Beispiel $\pi : A \leftrightarrow B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 110 \\ 1 & 110 & 0 \end{pmatrix} \cong_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 110 \\ 110 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bild permutieren:

für jede Permutation $\pi : \Delta \to \Delta$:

$(h, g) \cong_4 (\pi \circ h, \pi \circ g)$

Beispiel $\pi : 0 \leftrightarrow 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 110 \\ 1 & 110 & 0 \end{pmatrix} \cong_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 001 \\ 0 & 001 & 1 \end{pmatrix}$$

Isomorphe Hülle von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 110 \\ 1 & 110 & 0 \end{pmatrix}$:

alle Spaltenpermutationen von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 110 \\ 1 & 110 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 011 & 1 \\ 1 & 0 & 011 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 110 \\ 110 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 001 & 1 \\ 001 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 011 & 1 \\ 011 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 001 & 1 \\ 1 & 0 & 001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 1 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

$3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ Stück

Präfixe und Suffixe

warum ist $E\begin{pmatrix} 10 & 01 & 10 \\ 0 & 1101 & 01 \end{pmatrix} = \emptyset$?

Wenn $\neg\exists i : u_i \sqsubseteq_P v_i \vee v_i \sqsubseteq_P u_i$,
dann $\emptyset = E((u_1, v_1), \ldots)$.

analog für Suffixe:

Wenn $\neg\exists i : u_i \sqsubseteq_S v_i \vee v_i \sqsubseteq_S u_i$,
dann $\emptyset = E((u_1, v_1), \ldots)$.

u ist Präfix von v: $u \sqsubseteq_P v$: $\exists r \in \Sigma^* : ur = v$.
u ist Suffix von v: $u \sqsubseteq_S v$: $\exists l \in \Sigma^* : lu = v$.

Balance

Beispiel: warum ist $E\begin{pmatrix} 11 & 101 & 00 \\ 1 & 01 & 0 \end{pmatrix} = \emptyset$?

Wenn $\forall i : |u_i| > |v_i|$, dann $E((u_1, v_1), \ldots) = \emptyset$.

analog für ($<$) statt ($>$)

Wesentliche Instanzen

Buchstabe $\sigma \in \Sigma$ heißt *verboten* für (h, g),
wenn $\neg\exists w \in E(h, g) : \sigma \sqsubseteq w$.

Instanz (h, g) heißt *wesentlich*,
wenn $\neg\exists\sigma \in \Sigma : \sigma$ ist verboten für (h, g).

Warum ist C verboten für $\begin{pmatrix} 11 & 01 & 00 \\ 1 & 101 & 0 \end{pmatrix}$?

Wenn $\exists\delta \in \Delta$, so daß
$\exists x : |h(x)|_\delta > |g(x)|_\delta \wedge \neg\exists y : |h(y)|_\delta < |g(y)|_\delta$,
dann ist x verboten für (h, g).

analog für $(<) \leftrightarrow (>)$

Wirkung aller Tests (bis hier)

übrig: 7177 interessante nicht isomorphe PCP(3,3).

Buchstaben zählen

Beispiel: $\begin{pmatrix} 110 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 110 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lrrrcl} \text{Anzahl } 0: & & -b & +c & = & 0 \\ \text{Anzahl } 1: & -2a & +b & +c & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow a = b = c, \Rightarrow \forall w \in E(h,g)$: 3 teilt $|w|$

$|\Delta|$ Gleichungen für $|\Sigma|$ Unbekannte.

$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1101 \\ 0 & 1011 & 1 \end{pmatrix}$

Nullen: $a - c = 0$, Einsen: $-a + 2b - 2c = 0$

$a = c = 2x, b = 3x \Rightarrow$ Teiler 7,

kürzeste Lösung: $119 = 7 \cdot 17$.

$\begin{pmatrix} 11111 & 1 & 0011 \\ 0 & 1100 & 11 \end{pmatrix}$

Nullen: $a + 2b - 2c = 0$, Einsen: $-5a + b = 0$

$a = 2x, b = 10x, c = 11x \Rightarrow$ Teiler 23,

kürzeste Lösung: $115 = 5 \cdot 23$.

Offene technische Fragen

• Finde weitere Kriterien für Nichtlösbarkeit,

benutze Codes und Gleichungssysteme.

• Verifiziere wenigstens eine kürzeste Lösung einer schwierigen Instanz ohne Computer.

• Zum Beispiel: erkläre die 17 und die 5

• Zum Beispiel: erkläre die Struktur von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & u \\ 1 & v & 0 \end{pmatrix}$,

• zum Beispiel für $u = v = 110$ (Länge 75)

oder $u = 011, v = 1011$ (Länge 112).

• Finde schwierige PCP–Familien.
Beispiel (Lorentz) $\begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & 0^n1 \end{pmatrix}$

Zusammenfassung, Ausblick

- Teilziel erreicht:
interessante Beispiele für Grundstudium.

- Noch offen: Entscheidbarkeit von PCP(3).

- Bezug zu Forschung:

PCP $\rightarrow$ Morphismen $\rightarrow$ HD0L–Wort–Sprachen $\rightarrow$ HD0L–Baum–Sprachen $\rightarrow$ unendliche Normalformen in Ersetzungssystemen

- zu Lehre (geplant für SS 01):

Vorlesung oder Seminar über L–Systeme, Morphismen, Wort– und Baumgleichungen