## Logische Klassifikation regulärer Sprachen

- D. Perrin: Finite Automata, in: Handbook of Theoretical Computer Science, Elsevier, 1990
- J.-E. Pin: Syntactic Semigroups, in: Handbook of Formal Languages, Springer, 1996
- A. Potthoff: Logische Klassifizierung regulärer Baumsprachen, Diss., Univ. Kiel, 1994
- W. Thomas: Languages, Automata, and Logic, in: Handbook of Formal Languages, Springer, 1996



## Sprachen, Automaten, *Logik*

- Universum: Positionen in Wort (Baum, Graph, ...)
- Relationen $<, <_1$ für Positionen
- (für Bäume: $<_1, <_2, \ldots, <_d$)
- für alle $x \in \Sigma$: Prädikat $Q_x(p)$
- Variablen für Positionen (FO – first order)
- und Mengen von Positionen (MSO – monadic second order)
- Relationen $x \in X$



## Beispiele

- FO: alle Wörter, die rechts von jedem $a$ ein $b$ haben
- $<$ ist MSO-definierbar aus $<_1$
- MSO: $(aa)^*$

## $\text{MSO}_0$

- Elemente $\to$ Einermengen



## Büchi 1960

$L$ erkennbar durch endlichen Automaten
$\iff$ $L$ definierbar in MSO($<_1$).

Alphabet erweitern: $\Sigma \times \{0, 1\}^k$
($k$: Anzahl der Variablen/Zustände)

Korollar (Quantor-Elimination):
Jede MSO($<_1$)-Formel hat EMSO($<_1$)-Form.

Das gleiche für Bäume
(Thatcher, Wright, Doner, 1968-70)

## allgemeine ESO, Fagin 1974

$L$ definierbar in ESO $\iff$ $L \in \mathbf{NP}$

## FO(<)

$<_1$ ist durch $<$ definierbar

- Boolesche Operationen
- Verkettung
- kein $*$

## Sternfreie Ausdrücke

- $\emptyset$, $\epsilon$, $x$ (für all $x \in \Sigma$)
- Komplement, $\cap$, $\cup$
- Verkettung

- McNaughton, Papert 1972:
  FO(<) $\iff$ sternfrei.
- ist Sternfreiheit entscheidbar?



## Syntaktisches Monoid einer Sprache $L$

vergleiche: Rechtskongruenz
$x \sim_L y \iff \forall u : ux \in L \leftrightarrow uy \in L$

endlich viele Äq.-Klassen (= Zustände
des vollst. min. det. Automaten für $L$)

jetzt: syntaktische Kongruenz rechts und links
$x \approx_L y \iff \forall u, w : uxw \in L \leftrightarrow uyw \in L$

endlich viele Äq.-Klassen
aus v.m.d. Aut. von $L$ zu berechnen

diese bilden Monoid (unter $\cdot$)

"genauso" für Bäume: $\approx_L$ auf Kontexten!



## Aperiodizität

$H$ eine Halbgruppe.

- $x \in H$ *idempotent*: $x^2 = x$
- $H$ endlich $\Rightarrow \forall x : \exists k : x^k$ ist idemp.
- (bezeichnen dieses $x^k$ mit $x^\omega$)
- $H$ *aperiodisch*: $\forall x : x^\omega = x^{\omega+1}$

Schützenberger 1965:
aperiodisch $\iff$ sternfrei

## Erweiterte Sternhöhe

- (A)periodizität entscheidbar
- es gibt periodische Sprachen ($\geq$ ein $*$)
- *offen*: ex. Sprachen mit Sternhöhe $> 1$?



## Das gleiche für Bäume?

Kleene-Stern für Bäume

Thomas 1984:
FO(<) $\Rightarrow$ aperiodisch $\Rightarrow$ sternfrei

Potthoff 1994: jede reguläre Baumsprache
über $\Sigma$ ohne unäre Symbole ist sternfrei.

*offen*: Entscheidbarkeit von:
"ist $L$ FO-definierbar?"

## Straubing-Hierarchie f. aperiod. Spr.

Halbring (Sprachen, $\cup, \cdot$)
vgl. Ring (Polynome, $+, \cdot$)

$M$ eine Menge von Sprachen:

- polynomiale Hülle $\mathbf{PC}(M)$:
  $\{\bigcup L_0 a_1 L_1 \dots a_n L_n \mid a_i \in \Sigma, L_i \in M\}$
- Boolesche Hülle $\mathbf{BC}(M)$:
  Komplement, $\cup$, $\cap$

Straubing-Hierarchie $M_0 = \{\emptyset, \Sigma^*\}$

$M_{k+1/2} = \mathbf{PC}(M_k)$; $M_{k+1} = \mathbf{BC}(M_{k+1/2})$

- Hierarchie ist echt
- schöpft die aperiodischen Sprachen aus



## Beginn der Straubing-Hierarchie

*Stufe 0*: trivial: $\emptyset, \Sigma^*$

*Stufe 1/2*: endl. Vereinigung von
$\Sigma^* a_1 \Sigma^* \dots a_n \Sigma^*$.
($\Rightarrow$ kleine Schleifen in Automaten!)

*Stufe 1*: Boolesche Kombinationen von 1/2.
endliche Sprachen $\subseteq$ Stufe 1.

*Stufe 3/2*: endl. Vereinigung von
$A_0^* a_1 A_1^* \dots a_n A_n^*$ mit $A_i \subseteq \Sigma$.
($\Rightarrow$ kleine Schleifen in Automaten!)

bis hierher auch entscheidbare
Charakterisierungen
durch geordnetes syntakisches Monoid.

*offen*: wie weiter? (z. b. Stufe 2)

*offen*: und für Bäume?
(kleine Schleifen in Baum-Automaten)