Das Fibonacci-Wort

$abaababaabaababaababaabaababaabaab\ldots$

Unendliche Wörter: $\Sigma^\omega = (\omega \to \Sigma)$

$(\cdot) : (\Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*) \cup (\Sigma^* \times \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega)$

Homomorphismen $h : (\Sigma^* \to \Sigma^*) \cup (\Sigma^\omega \to \Sigma^\omega)$

$\forall u, v : h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v)$
Hom. entsteht aus $h' : \Sigma \to \Sigma^*$

Beispiel $h' : a \mapsto ab, b \mapsto a$

Monotonie:

$\forall w \in M : w \sqsubset h(w)$
(w ist echter Präfix von $h(w)$).

$\lim_{n\to\infty} h^n(w)$ ist wohlbestimmt

Das Thue-Wort (Axel Thue, 1912)

$t := \lim h^n(a)$ mit $h : a \mapsto ab, b \mapsto ba$

$t = abbabaabbaababbabaababbaabbabaab\ldots$

Satz: t enthält keinen Faktor u^3.

folgt aus: t ist überlappungsfrei.

overlap: Faktor $xwxwx$ mit $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Beweis: kleinstes n mit $xwxwx \subset h^n(a)$.

Fall $|w| \equiv 1(2)$: finde overlap in $h^{n-1}(a)$.

Fall $|w| \equiv 0(2)$: „geht nicht auf“

Das Morse-Wort (M. Morse, 1944)

$m := \lim\{a \mapsto abc, b \mapsto ac, c \mapsto b\}$ (M. Morse)

$m = abcacbabcbacabcacbacabcb\ldots$

$t = h(m)$ mit Hom. $h : a \mapsto abb, b \mapsto ab, c \mapsto a$

$$\begin{array}{ccccccccc} a & \overset{m}{\to} & abc & b & \overset{m}{\to} & ac & c & \overset{m}{\to} & b \\ h\downarrow & & h\downarrow & h\downarrow & & h\downarrow & h\downarrow & & h\downarrow \\ abb & \overset{t}{\to} & abbaba & ab & \overset{t}{\to} & abba & a & \overset{t}{\to} & ab \end{array}$$

Satz: m enthält keinen Faktor u^2.

Beweis: $u^2 \subset m \Rightarrow$ overlap in $h(m)$.

Beweis: $h(m)$ beginnt immer mit a.

Vermeidbare Muster

Def: *Muster* $m \in (\Sigma \cup V)^+$.

Def: Wort w *enthält* Muster m:
$\exists \sigma : V \to \Sigma^+$ mit $\sigma(m) \subseteq w$.

Bsp: $\forall w \in \{a, b\}^{>3} : w$ enthält xx.

Bsp: $\forall w \in \{a, b\}^{>38} : x^2yxy \subset w$

Def: Muster m *vermeidbar* über Σ:
es gibt *beliebig lange* $w \in \Sigma^*$ ohne m.

(äquivalent: ... es gibt *ein unendliches* w ...)

Bsp: xx vermeidbar für $|\Sigma| \geq 3$ (Thue–Wort)
$\Rightarrow$ Muster xx trennt $|\Sigma| = 3$ von $|\Sigma| = 2$.

$ABwBCxCAyBAzAC$ trennt $|\Sigma| = 4$ von 3.

offen: trenne $|\Sigma| = n + 1$ von n für $n > 3$.

offen: Entscheidbarkeit von
„ist m für $|\Sigma| = n$ vermeidbar?“

Wortgleichungen

Für Muster $m_1, m_2 \in (\Sigma \cup V)^+$:
gibt es $\sigma : V \to \Sigma^*$ mit $\sigma(m_1) = \sigma(m_2)$?

Beispiel: $ABxCy = yCxBA$
(Lösung $x = A, y = ABA$)

Beispiel: $Ax = xB$ nicht lösbar.

Satz (Makanin 1977): Existentielle Theorie von Wortgleichungen über freien Monoiden ist entscheidbar.

Beweis: Algorithmus. Zeit: $\underbrace{\exp(\dots(\exp}_{5}(|m|)))$.
(Lösen Diophantische Gleichungen.)

Beziehungen zu Unifikation 2. Ordnung.

Für Baumgleichungen: Entscheidbarkeit offen.

Burnside-Probleme

endliche erzeugte (Halb–)Gruppe
(mit m Generatoren),

aber nicht frei, sondern $\forall x \in G : x^n = 1$.

Burnside 1902: *für welche m, n ist G endlich?*

- $n = 2$: G ist kommutativ $\to$ $|G| = 2^m$.
- $n = 3$: Bsp: $m = 2$ $\to$ $|G| = 3^3$
- $n = 4, 6$: $|G| < \infty$
- $n = 5, 7, 8 \dots N$ offen

$\exists N (\approx 1000) : \forall n \geq N$:
es gibt unendliche $G \in B(m, n)$.

$\exists f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : \forall G \in B(m, n)$:
$|G| \leq f(m, n)$ oder $|G| = \infty$

Vorsicht: $f(m, n) \leq \underbrace{m^{m^{\cdots m}}}_{n^{n^n}}$

(Efim Zelmanov, Fields–Medaille 1994)

Burnside für Monoide

Def: für $w \in \Sigma^\omega$: $M(w) := (F(w) \cup 1, \circ)$ mit

$$x \circ y := \begin{cases} \text{wenn } x,\ y \text{ und } xy \in F(w), \\ \text{dann } xy, \text{ sonst } 1. \end{cases}$$

$F(w)$ ist endlich erzeugtes Monoid.

$F(w)$ unendlich $\Rightarrow$ $M(w)$ unendlich.

w vermeidet $u^p \Rightarrow \forall x \in M(w) : x^p = 1$.

Thue– und Morse–Wörter
$\Rightarrow$ unendliche Burnside-Monoide.

ausführlich dann alles in der Vorlesung

Kombinatorik auf endlichen Strukturen

Sommersemester 2000