## WQOs auf Wörtern

WQO : keine unendliche absteigende Kette und keine unendliche Antikette.

$u \subseteq v$ ($u$ ist *Faktor* von $v$): $\exists x, y \in \Sigma^* : xuy = v$

$(\Sigma^*, \subseteq)$ ist *keine* WQO.
Beweis: unendliche Antikette 10*1.

$u = u_1 u_2 \cdots u_m \leq v$
($u$ ist *(schwaches) Teilwort* von $v$):
$\exists x_0, x_1, \ldots, x_m \in \Sigma^* : x_0 u_0 x_1 u_1 \cdots u_m x_m = v$

$(\Sigma^*, \leq)$ *ist* WQO.
Beweis: Kruskals Baum-Satz.

Das ist äußerst nichtkonstruktiv!



Beispiel: $P$ :=Menge der Dezimaldarstellungen von Primzahlen

Finde $M = \min_{\leq} P$. Nach Satz ist $M$ endlich. Wie sieht es aus?

$M = \{$ 2, 3, 5, 7, 11, 19, 41, 61, 89, 409, 449, 499, 881, 991, 6469, 6949, 9001, 9049, 9649, 9949, 60649, $\ldots\}$

## Einbettung und Regulärität

Wenn $B$ regulär, dann $B^{\geq}$ konstruierbar.
(Beweis: Schleifen einfügen.)

Für $M_0 \subset M$, berechne $\Sigma^* \setminus M_0^{\geq}$.
Im Beispiel: 46*9 $\cup$ 6*0*49.

$\Rightarrow \{\ldots, 666649, 66600049, 66000049, 60000049\}$

Für *jede* Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ gilt:
$A^{\geq} = \{v \mid \exists u \in A : u \leq v\}$ ist regulär.
(Beweis: $B := \min_{\leq} A$ ist endlich.)



Beispiel: $Q$ :=Menge der Dezimaldarstellungen von Quadratzahlen $\geq 1$.

$\min_{\leq} Q = \{$ 1, 4, 9, 25, 36, 576, 676, 7056, 80656, 665856, 2027776, 2802276, 22282727076, 77770707876, 78807087076, 7888885568656, 8782782707776, $\ldots\}$

offene Frage: sind das alle?

amüsante Übungsaufgabe,
aber *kein* Forschungsthema:

Lösung ist mühevoll,
aber man lernt dabei wohl

- nichts Neues über Quadratzahlen
- nichts Neues über Einbettung $\leq$



## WQO auf Graphen

„ist Teilgraph von“ ist keine WQO.
( unendliche Antikette $\{C_n \mid n \geq 3\}$ )

Def: $G$ ist *Minor* von $H$ $\quad (G \leq H)$:
$\exists$ Teilgraph $H'$ von $H$ mit:
$G$ entsteht aus $H'$ durch *Kantenkontraktionen*.

Vermutung (Wagner),
Satz (Robertson, Seymour, 1983–98):

# $\leq$ ist WQO.

*„. . . ein Satz, der selbst die tiefsten Ergebnisse der Graphentheorie wie ein Riese überragt.“* (R. Diestel)

## Verbotene Minoren

Def: Menge $P$ von Graphen heißt *erblich*:
$\forall G \in P : \forall M \leq G : M \in P$.

Bsp: $P =$ plättbare („planare“) Graphen.

Lemma: $P$ erblich $\iff$
$\exists$ endliche Menge $F$ (*verbotene Minoren*)
mit $P = \mathsf{Forb}_{\leq}(F) = \{G \mid \forall M \in F : M \not\leq G\}$.

Beweis: $F = \min_{\leq}$(Komplement von $P$).
Nach Theorem ist $F$ endlich.

Bsp (Kuratowski, 1930): Für plättbare Graphen ist $F = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Satz (RS): Für jedes $M$: die Frage $M \leq G$ ist in $O(|G|^3)$ entscheidbar.

Folg: Erbliche Graphenklassen sind in P.

Bsp: Knotenfreie Graphen.



## Baumweite (tree width)

$\mathsf{Forb}_{\leq}(K_3) =$ Bäume (Wälder)

Was ist $\mathsf{Forb}_{\leq}(K_4)$?

sind plättbar, denn $K_4 \leq K_5$ und $K_4 \leq K_{3,3}$

Def: $(T, z)$ ist *Baumzerlegung* von $G$:
$T$ ist Baum, $z : V(T) \to 2^{V(G)}$

- überdeckt $G$: $\bigcup_{t \in V(T)} z(t) = V(G)$
- $\forall$ Kante $uv$ in $G$: $\exists t \in V(T) : uv \subseteq z(t)$
- $\forall$ Pfad $r \dots s \dots t$ in $T$: $z(r) \cap z(t) \subseteq z(s)$

Def: Weite $(T, z) = \max_t |z(t)| - 1$
Def: Baumweite $\mathsf{tw}(G) = \min_{(T,z)}$ Weite $(T, z)$



## Baumweite und Komplexität

$\mathsf{tw}(G)$ *klein* $\sim$ $G$ ist *fast* ein Baum.

für viele NP-harte Fragen gibt es Algorithmen

- exponentiell in $\mathsf{tw}(G)$
- polynomial in $|G|$

„$\mathsf{tw}(G) \leq k$?“ ist NP-vollständig.

$H$ plättbar $\to$ $\exists c : \forall G \in \mathsf{Forb}_{\leq}(H) : \mathsf{tw}(G) \leq c$
Beispiel: $H = Q_n$ (Gitter $n \times n$): $c = 20^{2n^5}$

beliebig große $Q_n \leq G$, beliebig große $\mathsf{tw}(G)$,
Parkettierung $\Rightarrow$ TM simulieren

## Hadwigers Vermutung (1943)

$G \in \mathsf{Forb}_{\leq}(K_r) \;\Rightarrow\; \chi(G) \leq r - 1$

$r \leq 2$ trivial, $r = 3$ Bäume, $r = 4$ einfach,
$r = 5, 6 \Leftrightarrow$ Vierfarbensatz (Wagner, 1937),
$r \geq 7$: offen.