Struktur und Endlichkeit

- Objekte $X \in M$
- Teilobjekt $Y \trianglelefteq X$
- Größe $|\cdot| : M \to I\!N$
- Eigenschaft $P : M \to \mathsf{Bool}$

$$\forall n \in I\!N : \exists m \in I\!N : \forall X \in M :$$
$$|X| \geq m \Rightarrow \exists Y \trianglelefteq X : |Y| \geq n \wedge P(Y)$$

Es gibt keine beliebig große Unordnung.

Ramsey-Theorie: Grundlagen

K_m = vollständiger Graph auf m Knoten

Betrachte Kantenfärbungen
$F_n : E(K_n) \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$.

F. P. Ramsey (1930) $R(r, b) :=$

$$\min \left\{ n \mid \forall F_n : \begin{array}{c} (\exists F_r \trianglelefteq F_n : \text{mono}_r(F_r)) \\ \vee \quad (\exists F_b \trianglelefteq F_n : \text{mono}_b(F_b)) \end{array} \right\}$$

$R(2, a) = R(a, 2) = a$
$R(a + 1, b + 1) \leq R(a, b + 1) + R(a + 1, b)$

$$R(a, b) \leq \binom{a + b - 2}{a - 1} \leq 2^{a+b-2}$$

2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40...43
4	9	18	25	35...41				
5	14	25	43...49					

Untere Schranken für Ramsey-Zahlen

explizit: Graphen mit spezieller Struktur

nichtkonstruktiv: probabilistisch

in K_n einen K_a auswählen: $\binom{n}{a}$ Möglichkeiten

hat $\binom{a}{2}$ Kanten, bleiben $\binom{n}{2} - \binom{a}{2}$

ausgewählte monochrom, andere Kanten beliebig färben: $2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{a}{2}}$ Färbungen

Anzahl der Färbungen des K_n mit ≥ 1 einfarbigen K_a ist $\leq \binom{n}{a} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{a}{2}} = A$

Anzahl *aller* Färbungen ist $F = 2^{\binom{n}{2}}$

Für $n < 2^{a/2}$ ist $A < F \quad \Rightarrow 2^{a/2} \leq R(a, a)$

Andererseits $R(a, a) < 2^{2a-2}$

Ramsey-Theorie: Erweiterungen

auf mehr Farben:
$R(c_1, c_2, \ldots, c_n) \leq R(c_1, R(c_2, \ldots, c_n))$

$R(3, 3, 3) = 17; \quad 51 \leq R(3, 3, 3, 3) \leq 64$

auf Hypergraphen: Kanten $E \subseteq \binom{V}{k}$

$R(1; a, b) = a + b - 1$ (Schubfachschluß)
$R(2; a, b) = R(a, b)$
$R(k + 1; a + 1, b + 1) \leq$
$1 + R(k; R(k + 1, a, b + 1), R(k + 1, a + 1, b))$

$R(3; 4, 4) = 13$ andere nicht exakt bekannt

auf unendliche Graphen: Jede unendliche Matrix $A : I\!N^2 \to \{0, 1\}$ enthält eine unendliche einfarbige Untermatrix:

$$\exists c \in \{0, 1\} : \exists M \subseteq I\!N : \forall i, j \in M : A(i, j) = c$$

Ramsey-Theorie: Anwendungen

auf Geometrie (Erdös–Szekeres, 1935):

$\forall n : \exists m : \forall X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^2 :$
$\exists X' = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X :$
X' sind Ecken eines konvexen Polygons.

Beweis: $m \leq R(4; 5, n)$

auf Arithmetik (I. Schur, 1916):

$\forall c : \exists m : \forall f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, c\} :$
$\exists x, y, z : f(x) = f(y) = f(z) \land x + y = z$

Beweis: $m \leq R(\overbrace{3, \ldots, 3}^{n\text{–mal}})$

auf Analysis (Funktionenfolgen)
(Galvin, Prikry, 1973)

auf Topologie (Ultrafilter) (Graham, Rothschild, Hindman, Glazer, 1977)
Für jede k-Färbung von $\mathbb{N}$ gibt es ein unendliches $A \subset \mathbb{N}$, so daß alle Summen $\sum_{x \in X} x$ mit $\emptyset \subset X \subset A$ gleichfarbig sind.

Färbungen und Zahlenfolgen

Vermutung (Baudet):
$\forall c : \forall n : \exists m : \forall f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, c\} :$
$\exists$ einfarbige arithmetische Folge $(x_1, \ldots, x_n)$.

Beweis (van der Waerden, 1927):
(für $c = 2$:) $m \leq$ Ackermann(n, n)

Verbesserung (Shelah, 1988):
(für $c = 2$:) $m \leq$ Ackermann$(4, n)$

Wohl-Quasi-Ordnungen (WQO)

transitiv, reflexiv (WPO: antisymmetrisch)

keine unendlichen absteigenden Ketten
$x_1 > x_2 > \ldots$
und keine unendlichen Antiketten

$\approx \;=\; \lesssim \cap \gtrsim$, *strikter* Anteil $> \;=\; \gtrsim \setminus \approx$

K ist *Kette*: $\forall x, y \in K : x \lesssim y \lor x \gtrsim y$
A ist *Antikette*: $\forall x, y \in A : x \not\lesssim y \land x \not\gtrsim y$

Satz: Jede Erweiterung $\lesssim' \supseteq \lesssim$ einer WQO ist wieder WQO.

Folgerung: $>'$ terminiert.

Satz: Einbettung $\trianglelefteq$ auf Bäumen ist WQO.

Satz: Jede rekursive Pfadordnung (RPO) enthält $\trianglelefteq$.

Anwendung: Zu TRS R gibt es kompatible RPO $\Rightarrow$ R terminiert.

Einbettung auf Bäumen

Def: $\trianglerighteq$ ist $\to^*$ für TRS
$\{f(t_1, \ldots, t_n) \to t_k \mid f \in \Sigma_n, k \in [1 \ldots n]\}$

Satz (Kruskal, 1960): $\trianglelefteq$ ist WQO.
Beweis (Nash–Williams, 1963)

Unendliche Folge $(x_1, x_2, \ldots)$ heißt
gut, falls $\exists i < j : x_i \trianglelefteq x_j$; sonst *schlecht*.
zu zeigen: jede unendliche Folge ist gut.

Lemma: Wenn $\lesssim$ WQO, dann
$\forall (x_1, x_2, \cdots) : \exists i_1 < i_2 < \ldots : x_{i_1} \lesssim x_{i_2} \lesssim \cdots$
Beweis: nur endlich viele terminale Indizes.

Lemma: Wenn $(M_k, \lesssim_k)$ WQO,
dann ist $(M_1 \times \ldots \times M_n, \lesssim)$ WQO
mit $x \lesssim y \iff \forall k : x_k \lesssim_k y_k$.
Beweis: Induktion nach n.

Beweis des Satzes: minimale schlechte Folge.

Rekursive (Lexikografische) Pfad–Ordnungen (RPO, LPO)

Def (Dershowitz, 1979): LPO $\gtrsim$ auf $\mathsf{Tree}(\Sigma)$:
(zu Präzedenz $\gtrsim$ auf Signatur Σ)

$s = f(s_1, \dots, s_m) \gtrsim g(t_1, \dots, t_n) = t$, falls

- ($\mathsf{Var}(s) \ni t$ und $s \neq t$)
- oder $\exists i : s_i \gtrsim t$
- oder $f > g$ und $\forall j : s \gtrsim t_j$
- oder $f \approx g$ und $(s_1, \dots, s_m) \gtrsim_{\mathsf{lex}} (t_1, \dots, t_n)$

Beispiel $\Sigma = \{i_1 > f_2 > e_0\}$.
$i(e) > e; i(f(x, y)) > f(i(y), i(x))$;
$f(f(x, y), z) > f(x, f(y, z))$

Beispiel $\Sigma = \{a_2 > s_1\}$.
$a(s(x), s(y)) > a(x, a(s(x), y))$

Satz: jede LPO ist Halbordnung.

Satz: Jede LPO $\gtrsim$ enthält $\trianglerighteq$,
und terminiert deswegen.

Anwendung von LPOs

Wortproblem: Gegeben E, entscheide $x \leftrightarrow_E^* y$

Vervollständigung: suche R mit $\leftrightarrow_R^* = \leftrightarrow_E^*$
und R ist terminierend und konfluent
(= konvergent)

Algorithmus: kritische Paare hinzunehmen.
Diese müssen orientiert werden.
Dazu braucht man passende Ordnung.

Buchbergers Algorithmus =
Vervollständigung von Polynom-Mengen
(zu Gröbner-Basen).