Sylver Coinage, Bennewitz 1. 10. 04

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

1 Definition

erfunden von John H. Conway 197?

- Spielsituation: Menge von natürlichen Zahlen > 1.
- Spielzug von $M \to M \cup \{z\}$, falls z keine Linearkombination (mit natürlichen Koeffizienten) von M ist.
- Spielweise: zwei Spieler ziehen abwechselnd.
- Spielziel: wer nicht mehr ziehen kann (weil er 1 sagen müßte), hat verloren.

2 Wie lange dauern die Spiele?

Beliebig lange, aber nicht unendlich lange.

Satz: wenn $\gcd(M) = g$, dann sind nur endlich viele Vielfache von g spielbar.

Beweis: größte nicht mit a, b für $\gcd(a, b) = 1$ darstellbare Zahl ist $ab-a-b$ (Satz von Sylvester).

Satz: und nach diesen endlich vielen Vielfachen von g kommt ein M' mit $\gcd(M') < \gcd(M)$, oder es ist Schluß.

3 Strategien

Existieren Gewinnstrategien? Ja, denn jedes Spiel ist endlich.

Sind sie "konstruktiv"? Im allgemeinen: Nein. Für $g = 1$: Theoretisch ja, praktisch nein.

4 Beispiele für gute und schlechte Züge

Antwort auf 2 ist 3 und umgekehrt.

Antwort auf 4 ist nicht 5, denn darauf tötet 11.

Richtige Antwort auf 4 ist 6 und umgekehrt.

5 Enden, Satz von Hutchings

In Spielsituation M mit $g = 1$, betrachte alle noch spielbaren Zahlen Z.

Ein $z \in Z$ heißt "Ende", falls durch Spielen von z keine weitere Zahl aus Z ausgeschlossen wird.

Bem.: $\max Z$ ist immer ein Ende.

Def.: M eine "End-Position", wenn $\max Z$ das einzige Ende ist.

Satz: wenn $\gcd(a, b) = 1$ und $\{a, b\} \neq \{2, 3\}$, dann ist $\{a, b\}$ eine End-Position.

Beweis: Bild aus WW3 (S. 617)

6 Strategie-Klau

Satz: In einer Endposition gewinnt der nächste Spieler.

Beweis: Fallunterscheidung: entweder ist $\max Z$ ein guter Zug oder nicht ...

Also: Für $\gcd(a, b) = 1, \{a, b\} \neq \{2, 3\}$ gewinnt in $\{a, b\}$ der nächste Spieler.

7 Anwendungen

Satz: Für Primzahl $p \geq 5$ verliert in $\{p\}$ der nächste.

Beweis: er muß ja eine zu p teilerfremde Zahl spielen.

Satz: Wenn n einen echten Primteiler ≥ 5 hat, dann gewinnt der nächste Spieler.

Beweis: er spielt p.

8 Offene Fragen

Da bleiben also nur die Zahlen $2^a \dot{3}^b$ übrig: $2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24, 27 \ldots$.

Einige kleine kann man von Hand entscheiden, aber der Status von $\{16\}, \{18\}, \{24\}, \{27\}$ ist bis heute offen.

Auch endliche Spiele wie $\{31, 37\}$ sind praktisch nicht behandelbar.

Mit Tricks kann man z. b. ausrechnen: der einzige Gewinnzug von $\{8, 30, 34\}$ ist 49337.

Satz: es gibt nur endlich viele Gewinn-Startzüge unter $\{2^a 3^b\}$. Beweis: dürfen nicht bzgl. Teilbarkeit vergleichbar sein.

Folgerung: Status von $\{n\}$ ist entscheidbar (es gibt Algorithmus, der), aber man kann den Alg. (noch) nicht konstruieren.

Aufgaben

Status von $\{8\}, \{9\}, \{12\}$.

Literatur

[1] Elwyn Berlekamp, John H. Conway, Richard Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Vol. 3, 2nd ed., AK Peters 2002

[2] Colonel Sichermal: *Sylver Coinage*, `http://www.monmouth.com/~colonel/sylver/`