Constraint-Programmierung Vorlesung Sommersemester 2009,12,15, WS 2016,22

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

3. Februar 2023

Einleitung

Constraint-Programmierung—Beispiel

```
(set-logic QF_NIA)(set-option :produce-models true)
(declare-fun P () Int) (declare-fun Q () Int)
(declare-fun R () Int) (declare-fun S () Int)
(assert (and (< 0 P) (<= 0 Q) (< 0 R) (<= 0 S)))
(assert (> (+ (* P S) Q) (+ (* R Q) S)))
(check-sat)(get-value (P Q R S))
```

- *Constraint-System*: eine prädikatenlogische Formel F
  $0 < P \wedge \cdots \wedge P \cdot S + Q > R \times Q + S$
- *Lösung*: Interpretation (Var.-Belegung), für die F wahr ist
- CP ist eine Form der *deklarativen* Programmierung.
- *Vorteil*: Benutzung von allgemeinen Suchverfahren (bereichs-, aber nicht anwendungsspezifisch).

Industrielle Anwendungen der CP

- Verifikation von Schaltkreisen
  (*bevor* man diese tatsächlich produziert)
  $F =$ S-Implementierung$(x) \neq$ S-Spezifikation(x)
  wenn F unerfüllbar ($\neg\exists x$), dann Implementierung korrekt
- Verifikation von Software durch *model checking*:
  Programmzustände abstrahieren durch Zustandsprädikate, Programmabläufe durch endliche Automaten.
  z. B. Thomas Ball et al. 2004: *Static Driver Verifier*
  `https://www.microsoft.com/en-us/research/project/slam/publications/`
  benutzt Constraint-Solver Z3 (Nikolaj Björner et al., 2007–) `https://github.com/Z3Prover/z3/wiki`

Industrielle Anwendungen der CP

- automatische Analyse des Resourcenverbrauchs von Programmen
  - Termination (jede Rechnung hält)
  - Komplexität (. . . nach $O(n^2)$ Schritten)
- mittels *Bewertungen* von Programmzuständen:
  - W : Zustandsmenge $\to \mathbb{N}$
  - wenn $z_1 \to z_2$, dann $W(z_1) > W(z_2)$.
- Parameter der Bewertung werden durch Constraint-System beschrieben.
- vgl. Carsten Fuhs: *Automated Termination Analysis. . .* , Intl. School on Rewriting, 2022 `http://viam.science.tsu.ge/clas2022/isr/termination.html`

CP-Anwendung: Polynom-Interpretationen

- Berechnungsmodell: Wortersetzung ($\approx$ Turingmaschine)
- Programm: $ab \to ba$ ($\approx$ Bubble-Sort)
  Beispiel-Rechnung: $abab \to baab \to baba \to bbaa$
- Bewertung W durch lineare Funktionen
  $f_a(x) = Px + Q, f_b(x) = Rx + S$ mit $P, Q, R, S \in \mathbb{N}$
  $W(abab) = f_a(f_b(f_a(f_b(0)))), \dots$
- monoton: $x > y \Rightarrow f_a(x) > f_a(y) \wedge f_b(x) > f_b(y)$
- kompatibel mit Programm: $f_a(f_b(x) > f_b(f_a(x))$
- resultierendes Constraint-System für P, Q, R, S,
- Lösung mittels Z3

Constraints in der Unterhaltungsmathematik

- Nikoli (1980–, „the first puzzle magazine in Japan.“)
  `https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/`
- Erich Friedman: *Math Magic* 1998–
  `https://erich-friedman.github.io/mathmagic/`
- Angela und Otto Janko: `http://www.janko.at/Raetsel/`,
- Donald Knuth: *A Potpourri of Puzzles*, 2022,
  TAOCP, Band 4, Pre-Faszikel 9b,
  `https://cs.stanford.edu/~knuth/taocp.html`,
  `https://cs.stanford.edu/~knuth/fasc9b.ps.gz`

Wettbewerbe für Constraint-Solver

- für aussagenlogische Formeln:
  `http://www.satcompetition.org/`
  (SAT $=$ satisfiability)
- für prädikatenlogische Formeln
  `https://smt-comp.github.io/2022/`
  (SMT $=$ satisfiability modulo theories)
  Theorien: $\mathbb{Z}$ mit $\leq$, Plus, Mal; $\mathbb{R}$ mit $\leq$, Plus; . . .
- Termination und Komplexität
  `https://www.termination-portal.org/wiki/Termination_Competition`

Gliederung der Vorlesung

- Aussagenlogik
  - CNF-SAT-Constraints (Normalf., Tseitin-Transformation)
  - DPLL-Solver, Backtracking und Lernen
  - ROBDDs (Entscheidungsdiagramme)
- Prädikatenlogik (konjunktive Constraints)
  - Finite-Domain-Constraints
  - naive Lösungsverfahren, Konsistenzbegriffe
  - lineare Gleichungen, Ungleichungen, Polynomgleichungen
  - Termgleichungen, Unifikation
- Kombinationen
  - Kodierungen nach CNF-SAT (FD, Zahlen)
  - SMT, DPLL(T)

Organisatorisches

- jede Woche 1 Vorlesung + 1 Übung
- Hausaufgaben (*Haus* bedeutet: zuhause bearbeiten, in der Übung diskutieren)
  - Aufgaben im Skript
  - Aufgaben in `autotool`

  Prüfungszulassung: 50 Prozent der autotool-Pflichtaufgaben
- Klausur (2 h, keine Hilfsmittel). — Oder?
- Quelltexte, Planung und Diskussion der Übungsaufgaben `https://gitlab.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cp-ws22` (Projekt-Mitgliedschaft beantragen, Zugang wird dann auf Mitglieder eingeschränkt)

Literatur

- Krzysztof Apt: *Principles of Constraint Programming*, `https://www.cambridge.org/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521825832`
- Daniel Kroening, Ofer Strichman: *Decision Procedures*, Springer 2008. `https://www.decision-procedures.org/`
- Petra Hofstedt, Armin Wolf: Einführung in die Constraint-Programmierung, Springer 2007. `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-68194-6`
- Uwe Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akad. Verlag, 2000.

Hausaufgaben

1. Pierluigi Crescenzi, Viggo Kann *A compendium of NP optimization problems* `https://web.archive.org/web/20200227195925/http://www.nada.kth.se/~viggo/problemlist/compendium.html`

   Beispiel: Minimum File Transfer Scheduling (node195). Erläutern Sie die Spezifikation an einem Beispiel.
2. Aufgabe: formalisieren Sie *Math Magic* Februar 2007.

   Was ist dabei für Springer und König einfacher als für Dame, Läufer, Turm?

   (allgemein für Math Magic: lösen Sie eine der offenen Fragen `https://erich-friedman.github.io/mathmagic/unsolved.html`)

3. Aufgabe: formalisieren Sie `https://www.janko.at/Raetsel/Wolkenkratzer`.
   - Unbekannte: $h_{x,y} \in \{0,\ldots,n-1\}$ für $x,y \in \{0,\ldots,n-1\}$
   - Constraint für eine Zeile x:

     $\bigvee_{p\in \text{Permutationen}(0,\ldots,n-1), p \text{kompatibel mit Vorgaben}} \bigwedge_{y\in\{0,\ldots,n-1\}}(h_{x,y}$
     $p(y))$

     Bsp: $n = 4$, Vorgabe links 2, rechts 1, kompatibel sind $[0,2,1,3], [2,0,1,3], [2,1,0,3], [2,1,0,3]$.

     entspr. für Spalten
   - diese Formel wird exponentiell groß (wg. Anzahl Permutationen),

     Folge-Aufgabe: *geht das auch polynomiell*?

4. Constraint für monotone kompatible Bewertungsfunktion:
   - lösen Sie mit Z3 (ist im Pool installiert, vgl. `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/pool/`)
   - eine *kleinste* Lösung finden (Summe von P, Q, R, S möglichst klein) — dafür Assert(s) hinzufügen.
   - Abstieg der so gefundenen Bewertungsfunktion nachrechnen für $abab \to baab \to baba \to bbaa$
   - gibt diese Bewertungsfunktion die maximale Schrittzahl genau wieder? (nein)
   - Folge-Aufgabe: entspr. Constraint-System für Bewertungsfunktion für $ab \to bba$ aufstellen und lösen.

Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln (SAT)

Aussagenlogik: Syntax

aussagenlogische Formel:

- elementar: Variable $v_1, \dots$
- zusammengesetzt: durch Operatoren
  - einstellig: Negation
  - zweistellig: Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz

Aussagenlogik: Semantik

- Wertebereich $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, Halbring $(\mathbb{B}, \vee, \wedge, 0, 1)$

  Übung: weitere Halbringe mit 2 Elementen?
- *Belegung* ist Abbildung $b : V \to \mathbb{B}$
- *Wert* einer Formel F unter Belegung b: $\operatorname{val}(F, b)$
- wenn $\operatorname{val}(F, b) = 1$, dann ist b ein *Modell* von F, Schreibweise: $b \models F$
- *Modellmenge* $\operatorname{Mod}(F) = \{b \mid b \models F\}$
- F *erfüllbar*, wenn $\operatorname{Mod}(F) \neq \emptyset$
- Modellmenge einer *Formelmenge*: $\operatorname{Mod}(M) = \{b \mid \forall F \in M : b \models F\}$

Modellierung durch SAT: Ramsey

gesucht ist Kanten-2-Färbung des K_5 ohne einfarbigen K_3.

- Aussagenvariablen $f_{i,j}$ = Kante (i, j) ist rot (sonst blau).
- Constraints:

  $\forall p : \forall q : \forall r : (p < q \wedge q < r) \Rightarrow ((f_{p,q} \vee f_{q,r} \vee f_{p,r}) \wedge \dots)$

das ist ein Beispiel für ein Ramsey-Problem
(F. P. Ramsey, 1903–1930)
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Ramsey.html`
diese sind schwer, z. B. ist bis heute unbekannt: gibt es eine Kanten-2-Färbung des K_{43} ohne einfarbigen K_5?
`http://www1.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf`

Programmbeispiel zu Ramsey

Quelltext in `Ramsey.hs`

```
num p q = 10 * p + q ; n x = negate x
f = do
  p <- [1..5] ; q <- [p+1 .. 5] ; r <- [q+1 .. 5]
  [     [ num p q, num q r, num p r, 0 ]
     , [ n $ num p q, n $ num q r, n $ num p r, 0 ] ]
main = putStrLn $ unlines $ do
  cl <- f ; return $ unwords $ map show cl
```

Ausführen:

```
runghc Ramsey.hs | minisat /dev/stdin /dev/stdout
```


Benutzung von SAT-Solvern

Eingabeformat: SAT-Problem in CNF:

- Variable = positive natürliche Zahl
- Literal = ganze Zahl ($\neq 0$, mit Vorzeichen)
- Klausel = Zeile, abgeschlossen durch 0.
- Programm = Header
  `p cnf <#Variablen> <#Klauseln>`, dann Klauseln

Beispiel

```
p cnf 5 3
1 -5 4 0
-1 5 3 4 0
-3 -4 0
```

Löser: `minisat input.cnf output.text`

Modellierung durch SAT: N Damen

stelle möglichst viele Damen auf $N \times N$-Schachbrett, die sich nicht gegenseitig bedrohen.

- Unbekannte: $q_{x,y}$ für $(x, y) \in F = \{1, \dots, N\}^2$

  mit Bedeutung: $q_{x,y} \iff$ Feld (x, y) ist belegt
- Constraints: $\bigwedge_{a,b \in F, a \text{ bedroht } b} \neg p_a \vee \neg p_b$.
- „möglichst viele" läßt sich hier vereinfachen zu:

  „in jeder Zeile genau eine".

  vereinfachen zu: „. . . wenigstens eine."

Formulierung von SAT-Problemen mit Ersatz

- Autoren: Edward Kmett et al., `https://hackage.haskell.org/package/ersatz`,

```
import Prelude hiding ((&&),(||),not )
import Ersatz
main = do
  ans <- solveWith minisat $ do
    p <- exists ; q <- exists
    assert $ p && not q
    return [p,q::Bit]
  case ans of (Satisfied, Just res) -> print res
```

- Unbekannte erzeugen (`exists`), Formel konstruieren (`&&`,. . .), assertieren, lösen, Antwort benutzen
- zu Implementierung vgl. `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/untutorial/ersatz/`

N-Queens mit Ersatz

- ```
  solveWith minisat $ do
    let n = 40
        -- f ist Liste aller Positionen (wie auf Foli
        f = (,) <$> [0..n-1] <*> [0..n-1]
    qss <- replicateM n $ replicateM n (exists @Bit)
    let q (x,y) = qss !! x !! y
    assert $ and $ do qs <- qss; return $ or qs
    assert $ and $ do
      a <- f ; b <- f
      guard $ bedroht a b
      return $ not (q a) || not (q b)
    return qss
  ```
- ```
  bedroht a@(ax,ay) b@(bx,by) = a /= b
    && (ax == bx || ay == by || abs (ax-bx) == abs(ay
  ```

Zusammenfassung Ersatz (bisher)

- innerhalb von `solveWith`:

  boolesche Operatoren (`not, (||)`, usw.)

  werden angewendet auf *Formeln* (Typ `Bit`),

  nicht auf *Wahrheitswerte* (Typ `Bool`)
- `exists @Bit` konstruiert neue Variable,

  ist monadische Aktion (benutze `do`, `replicateM`, usw.)
- innerhalb von `assert`: funktional (nicht monadisch)
- noch nicht behandelt haben wir diesen Widerspruch:

  wir konstruieren beliebige Formel, Solver erwartet CNF

Hausaufgaben

1. unterschiedliche Halbringe auf zwei Elementen?
2. für die Formel $S(b, h)$ (abhängig von zwei Parametern $b, h \in \mathbb{N}$)

   Variablen: $v_{x,y}$ für $1 \le x \le b, 1 \le y \le h$

   Constraints:

   - für jedes x gilt: wenigstens einer von $v_{x,1}, v_{x,2}, \ldots, v_{x,h}$ ist wahr
   - und für jedes y gilt: höchstens einer von $v_{1,y}, v_{2,y}, \ldots, v_{b,y}$ ist wahr

   (a) unter welcher Bedingung an b, h ist $S(b, h)$ erfüllbar?
   Für den erfüllbaren Fall: geben Sie ein Modell an.

   Für den nicht erfüllbaren Fall: einen Beweis.

   (b) Erzeugen Sie (eine konjunktive Normalform für) $S(b, h)$ durch ein Programm (a - Sprache/Bibliothek beliebig, b - Haskell/Ersatz)
   (b, h von der Kommandozeile, Ausgabe nach stdout)

   (c) Lösen Sie $S(b, h)$ durch minisat (kissat, Z3, ...), vergleichen Sie die Laufzeiten (auch im nicht erfüllbaren Fall).

3. für das angegebene Ersatz-Programm zu N-Queens:
   - welche Größe haben die erzeugten Formeln (unter den `assert`)? (in Abhängigkeit von N)
   - welche Laufzeit hat das Programm?

4. Für $a, b \ge 2$: die Ramsey-Zahl $R(a, b)$ ist die kleinste Zahl n, für die gilt: jede rot-blau-Kantenfärbung eines K_n enthält einen roten K_a oder einen blauen K_b.

   (Der Satz von Ramsey ist, daß es für jedes a, b tatsächlich solche n gibt.)

   (a) Beweisen Sie:
   i. $R(a, b) = R(b, a)$
   ii. $R(2, b) = b$
   iii. $R(a + 1, b + 1) \le R(a, b + 1) + R(a, b + 1)$
   (das liefert einen Beweis des Satzes von Ramsey)
   iv. wenn dabei beide Summanden rechts gerade Zahlen sind, dann $R(a + 1, b + 1) < \ldots$

   (b) Bestimmen Sie damit obere Schranken für $R(3, 3), R(3, 4), R(4, 4)$ und vergleichen Sie mit den

   unteren Schranken durch SAT-Kodierung.

5. Realisierung der SAT-Kodierung von $R(a, b)$: benutzen Sie eine Funktion, die alle Teilfolgen gegebener Länge bestimmt.

   Beispiel: `subs 3 [1,2,3,4,5]`
   `= [[1,2,3],[1,2,4],[1,2,5],...,[3,4,5]]`
   (nicht notwendig in dieser Reihenfolge)

```
subs :: Int -> [a] -> [[a]]
subs 0 xs = [ [] ]
subs k [] = []
subs k (x:xs) = map _  _  <> subs k xs
```

   Verwenden Sie `subs a [1 .. n]` zur Auswahl des K_a sowie `subs 2 xs` zur Auswahl der Kanten.

6. Modellierung als aussagenlogisches Constraint:
   - Rösselsprung (= Hamiltonkreis)
   - Norinori
     `https://nikoli.com/en/puzzles/norinori/`
   - ABCEndView (oder ähnlich)
     `https://www.janko.at/Raetsel/AbcEndView/`

   Vorgehen bei Modellierung:

   - welches sind die Unbekannten, was ist deren Bedeutung?
     (Wie rekonstruiert man eine Lösung aus der Belegung, die der Solver liefert?)
   - welches sind die Constraints?
     (wie stellt man sie in CNF dar? — falls nötig)

SAT: Normalformen, Transformationen

Normalformen (DNF, CNF)

Definitionen:

- Variable: $v_1, \ldots$ Literal: v oder $\neg v$
- DNF-Klausel: Konjunktion von Literalen
- DNF-Formel: Disjunktion von DNF-Klauseln
- CNF-Klausel: Disjunktion von Literalen
- CNF-Formel: Konjunktion von CNF-Klauseln

Disjunktion als Implikation: diese Formeln sind äquivalent:

- $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) \rightarrow (y_1 \vee \ldots \vee y_n)$
- $(\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_m \vee y_1 \vee \ldots \vee y_n)$

Äquivalenzen

- Def: Formeln F und G heißen *äquivalent*, wenn $\mathrm{Mod}(F) = \mathrm{Mod}(G)$.
- Satz: zu jeder Formel F existiert äquivalente Formel G in DNF.
- Satz: zu jeder Formel F existiert äquivalente Formel G' in CNF.
- aber ... wie groß sind diese Normalformen?

Erfüllbarkeits-Äquivalenz

- Def: F und G *erfüllbarkeitsäquivalent*, wenn $\mathrm{Mod}(F) \neq \emptyset \iff \mathrm{Mod}(G) \neq \emptyset$.
- Satz: es gibt einen Polynomialzeit-Algorithmus, der zu jeder Formel F eine erfüllbarkeitsäquivalente CNF-Formel G berechnet.
- (Zeit $\geq$ Platz, also auch $|G| = \mathrm{Poly}(|F|)$)
- Beweis (folgt): Tseitin-Transformation
- Vor-Überlegung: warum gibt es keine vergleichbare Aussage für DNF?

Tseitin-Transformation

Spezifikation:

- Gegeben F, gesucht erfüllbarkeitsäquivalentes G in CNF.
- wir verschärfen das zu: $\mathrm{Var}(F) \subseteq \mathrm{Var}(G)$ und $\forall b : b \models F \iff \exists b' : b \subseteq b' \wedge b' \models G$.

Plan:

- für jeden nicht-Blatt-Teilbaum T des Syntaxbaumes von F eine zusätzliche Variable n_T einführen,
- so daß $\forall b' \in \mathrm{Mod}(G) : \mathrm{val}(n_T, b') = \mathrm{val}(T, b)$.

Realisierung:

- (Bsp.) $T = L \vee R$, dann $n_T \leftrightarrow (n_L \vee n_R)$ als CNF
- für jeden der $|F|$ Knoten: ≤ 8 Klauseln mit 3 Literalen

Tseitin-Transf. für Schaltkreise

- beschriebenes Verfahren funktioniert ebenso für Schaltkreise (azyklische gerichtete Graphen, mit Booleschen Operatoren markiert)
- Schaltkreis entsteht aus Baum durch Identifikation (sharing) von Knoten
- für jeden Knoten eine neue Variable angelegen und deren Wert lokal durch eine CNF bestimmen
- Ersatz realisiert *observable sharing* durch Adress-Vergleich von Syntaxbaumknoten (des Typs `Bit`)

```
-- (a || b) wird nur einmal T-transformiert:
let { s = a || b } in  s && (c === s)
```


Tseitin-Transformation in Ersatz (Bsp)

- so ausprobieren:

```
ghci> :set -XTypeApplications
ghci> runSAT' $ do
  x <- exists; y <- exists @Bit; assert (x === y)
((),SAT 4 ((1) & (-4 | -3 | -2) & (-4 | 2 | 3)
   & (-2 | 3 | 4) & (-3 | 2 | 4) & (-4)) mempty)
```

- Aufgabe: damit observable sharing bestätigen
- Aufgabe: CNF zu `assert (x /== (y /== z))` (XOR)

And-Inverter-Graphen

- Ersatz verwendet diesen Datentyp für Formeln

```
data Bit = Var Literal | Not Bit  | And [Bit]
```

  mit den Invarianten:
  - kein Argument von `And` ist `And`
  - das Argument von `Not` ist nicht `Not`
- die Implementierung von `(||)`, `(&&)`, `not` müssen die Invarianten erhalten
- die Tseitin-Transformation wird nur für `And` benötigt (aber mit beliebig vielen Argumenten)

Plaisted-Greenbaum-Transformation

- Tseitin für $a \wedge b$

  erzeugt neue Variable c

  und Klauseln $(a \wedge b) \rightarrow c, c \rightarrow a, c \rightarrow b$.
- `assert (a && b)` erzeugt zusätzlich Klausel c.
- damit wird Klausel $(a \wedge b) \rightarrow c$ nicht mehr benötigt.
- die Plaisted-Greenbaum-Transformation erzeugt diese unnötigen Klauseln von vornherein *nicht*.
- für moderne SAT-Solver entsteht dadurch keine Einsparung von Lösungszeit. Man spart nur Platz und evtl. Laufzeit bei Formel-Erzeugung.

Tseitin-Transformation (Aufgaben)

1. für diese Formeln:
   - $(x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow (x_3 \leftrightarrow x_4)$
   - Halb-Adder (2 Eingänge x, y, 2 Ausgänge r, c)
     $(r \leftrightarrow (\neg(x \leftrightarrow y))) \wedge (c \leftrightarrow (x \wedge y))$
   - Full-Adder (3 Eingänge, 2 Ausgänge)

   jeweils:

   - führe die Tseitin-Transformation durch
   - gibt es eine kleinere erfüllbarkeitsäquivalente CNF? (deren Modelle Erweiterungen der Original-Modelle sind)
2. `data Bit` hat weitere Konstruktoren (Xor, Mux).

Wo werden diese benutzt?

Helfen sie tatsächlich bei der Erzeugung kleiner CNFs?

Komplexität der Erfüllbarkeit

Motivation, Begriffe

- Laufzeit-Komplexität eines Programms P

  ist die Funktion f mit $f(n) =$ die maximale Laufzeit von P über alle Eingaben der Größe $\leq n$.
- solche Funktionen vergleicht man *asymptotisch*

  (ignoriert Anfangswerte und konstante Faktoren)
- Laufzeit-Komplexität einer Aufgabe A:

  die minimale Komplexität aller Programme, die A lösen
- die Erfahrung lehrt: SAT $\notin$ P, das ist jedoch unbewiesen,

  man konnte bisher nur zeigen: SAT ist NP-vollständig.

Wiederholung: NP-Vollständigkeit

- nichtdeterministische Turingmaschine (NDTM)
  - Rechnung ist eine Baum,
  - jeder Knoten ist eine Konfiguration (Bandinhalt, Kopfzustand, Kopfposition),
  - jede Kante ist ein Rechenschritt
  - Rechnung ist erfolgreich, wenn in wenigstens einem Blatt der Zustand akzeptierend ist
- NP $:=$ die Sprachen, die sich in Polynomialzeit durch NDTM entscheiden lassen
- Reduktion $M \leq_P L \iff \exists f : \forall x : x \in M \iff f(x) \in L$ und f ist P-berechenbar
- L ist NP-vollständig: $L \in$ NP und $\forall M \in$ NP : $M \leq_P L$

Wiederholung: SAT ist NP-vollständig

SAT $\in$ NP ist klar (NDTM rät die Belegung)
Sei $M \in$ NP, zu zeigen $M \leq_P$ SAT. Gegeben ist also das Programm einer NDTM, die M in Polynomialzeit akzeptiert

- übersetze eine Eingabe x für diese Maschine in eine Formel $f(x)$ mit $x \in M \iff f(x) \in$ SAT:
- benutzt Unbekannte $C(t, p, a) :\iff$ zur Zeit t steht an Position p das Zeichen a.
- Klauseln legen fest:

  für $t = 0$ steht die Eingabe auf dem Band,

  $\forall t$: von t nach $t + 1$ richtig gerechnet (lt. Programm)

  schließlich akzeptierender Zustand erreicht

Die Tseitin-Transformation

- die Tseitin-Transformation beweist SAT $\leq_P$ 3SAT

  denn sie in erzeugt aus einer beliebigen Formel F

  in Polynomialzeit

  eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel G in konkunktiver Normalform mit 3 Literalen je Klausel
- vereinfacht den Beweis der NP-Vollständigkeit weiterer Aufgaben (z.B. Graphenfärbung) 3COL.

  zu zeigen ist: $\forall A \in$ NP : $A \leq_P$ 3COL

  man benutzt $A \leq_P$ SAT $\leq_P 3$SAT $\leq_P$ 3COL.

Was nützen diese Aussagen?

- 1. sie beantworten die Frage: welche Aufgaben lassen sich SAT-kodieren: Aufgabe A hat SAT-Kodierung mit polynomieller Formelgröße $\iff A \in$ NP.
- 2. SAT ist NP-vollständig:

  falls SAT $\in P$ (es gibt einen SAT-Solver in Polynomialzeit) dann folgt NP $\subseteq P$.

  (jede NP-vollständige Aufgabe ließe sich durch SAT-Kodierung in Polynomialzeit lösen)

  das ist unwahrscheinlich (nach jetzigem Kenntnisstand)
  - für jedes bekannte SAT-Lösungsverfahren gibt es schwere Eingaben
  - Verfahren sind trotzdem erstaunlich leistungsfähig

SAT-Solver

Überblick

Spezifikation:

- Eingabe: eine Formel in CNF
- Ausgabe:
  - eine erfüllende Belegung
  - *oder* ein Beweis für Nichterfüllbarkeit

Verfahren:

- evolutionär (Genotyp $=$ Belegung)
- lokale Suche (Walksat)
- DPLL (Davis, Putnam, Logeman, Loveland)

Evolutionäre Algorithmen für SAT

- Genotyp: Bitfolge $[x_1, \ldots, x_n]$ fester Länge
- Phänotyp: Belegung $b = \{(v_1, x_1), \ldots, (v_n, x_n)\}$
- Fitness: z. B. Anzahl der von b erfüllten Klauseln
- Operatoren:
  - Mutation: einige Bits ändern
  - Kreuzung: one/two-point crossover?

Problem: starke Abhängigkeit von Variablenreihenfolge

Lokale Suche (GSat, Walksat)

Bart Selman, Cornell University,
Henry Kautz, University of Washington
`http://www.cs.rochester.edu/u/kautz/walksat/`
Algorithmus:

- beginne mit zufälliger Belegung
- wiederhole: ändere das Bit, das die Fitness am stärksten erhöht

Problem: lokale Optima — Lösung: Mutationen.

DPLL

Davis, Putnam (1960), Logeman, Loveland (1962),
`http://dx.doi.org/10.1145/321033.321034`
`http://dx.doi.org/10.1145/368273.368557`
Zustand $=$ partielle Belegung

- *Decide*: eine Variable belegen
- *Propagate*: alle Schlußfolgerungen ziehen
  Beispiel: Klausel $x_1 \vee x_3$, partielle Belegung $x_1 = 0$,
  Folgerung: $x_3 = 1$
- bei *Konflikt* (widersprüchliche Folgerungen)
  - (DPLL original) Backtrack (zu letztem Decide)
  - (DPLL mit CDCL) Backjump (zu früherem Decide)

DPLL-Begriffe

für partielle Belegung b (Bsp: $\{(x_1, 1), (x_3, 0)\}$): Klausel c ist

- *erfüllt*, falls $\exists l \in c : b(l) = 1$, Bsp: $(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$
- *Konflikt*, falls $\forall l \in c : b(l) = 0$, Bsp: $(\neg x_1 \vee x_3)$
- *unit*, falls $\exists l \in c : b(l) = \bot \wedge \forall l' \in (c \setminus \{l\}) : b(l') = 0$,
  Bsp: $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$. Dabei ist $l = \neg x_2$ das Unit-Literal.
- *offen*, sonst. Bsp: $(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

Eigenschaften: für CNF F und partielle Belegung b:

- wenn $\exists c \in F : c$ ist Konflikt für b, dann $\neg \exists b' \supseteq b$ mit $b' \models F$
  (d.h., die Suche kann dort abgebrochen werden)
- wenn $\exists c \in F$: c ist Unit für b mit Literal l, dann
  $\forall b' \supseteq b : b' \models F \Rightarrow b'(l) = 1$
  (d.h., l kann ohne Suche belegt werden)

DPLL-Algorithmus

Eingabe: CNF F,
Ausgabe: Belegung b mit $b \models F$ oder UNSAT.
$\mathrm{DPLL}(b)$ (verwendet Keller für Entscheidungspunkte):

- (success) falls $b \models F$, dann halt (SAT), Ausgabe b.
- (backtrack) falls F eine b-Konfliktklausel enthält, dann:
  - falls Keller leer, dann halt (UNSAT)
  - sonst $v := pop()$ und $\mathrm{DPLL}(b_{<v} \cup \{(v, 1)\}$.

  dabei ist $b_{<v}$ die Belegung *vor* decide(v)
- (propagate) falls F eine b-Unitklausel c mit Unit-Literal l enthält: $\mathrm{DPLL}(b \cup \{(\text{variable}(l), \text{polarity}(l))\})$.
- (decide) sonst wähle $v \notin \operatorname{dom} b$, push($v$), und $\mathrm{DPLL}(b \cup \{(v, 0)\})$.

DPLL: Eigenschaften

- Termination: DPLL hält auf jeder Eingabe
- Korrektheit: wenn DPLL mit SAT hält, dann $b \models F$.
- Vollständigkeit: wenn DPLL: UNSAT, dann $\neg \exists b : b \models F$

wird bewiesen durch Invariante

- $\forall b' : b' \in \mathrm{Mod}(F) \Rightarrow b \leq_{\text{lex}} b'$
  (wenn DPLL derzeit b betrachtet, und wenn F ein Modell b' besitzt, dann ist b' unterhalb oder rechts von b)
- dabei bedeutet: $b \leq_{\text{lex}} b'$:
  $b \subseteq b'$ oder $\exists v : b(v) = 0 \wedge (b_{<v} \cup \{(v, 1)\}) \subseteq b'$

Satz (Ü): für alle endlichen V: $<_{\text{lex}}$ ist eine wohlfundierte Relation auf der Menge der partiellen V-Belegungen:

DPLL-Beispiel

```
[[2,3],[3,5],[-3,-4],[2,-3,-4]
,[-3,4],[1,-2,-4,-5],[1,-2,4,-5]]
```

decide belegt immer die kleinste freie Variable, immer zunächst negativ

DPLL-Beispiel (Lösung)

```
[[2,3],[3,5],[-3,-4],[2,-3,-4]
,[-3,4],[1,-2,-4,-5],[1,-2,4,-5]]

[Dec (-1),Dec (-2),Prop 3,Prop (-4),Back
,Dec 2,Dec (-3),Prop 5,Prop (-4),Back
,Dec 3,Prop (-4),Back,Back,Back
,Dec 1,Dec (-2),Prop 3,Prop (-4),Back
,Dec 2,Dec (-3),Prop 5]
```

DPLL: Heuristik, Ergänzungen

- Methoden:
  - Wahl der nächsten Entscheidungsvariablen (kommt am häufigsten in aktuellen Konflikten vor)
  - Lernen von Konflikt-Klauseln (erlaubt Backjump)
  - Vorverarbeitung (Variablen und Klauseln eliminieren)
- alles vorbildlich implementiert und dokumentiert in Minisat `http://minisat.se/` (Niklas Een, Niklas Sorenson) (seit ca. 2005 sehr starker Solver)

  später übernimmt diese Rolle: Cadical, Kissat `http://fmv.jku.at/kissat/` (Armin Biere)
- wesentlich für Lernen und Vorverarbeitung ist *Resolution*

Semantisches Folgern

- Def: eine Formel F folgt aus einer Formelmenge M, geschrieben $M \models F$, falls $\operatorname{Mod}(M) \subseteq \operatorname{Mod}(F)$.
- Bsp: $\{x_1 \vee \overline{x}_2, x_2 \vee x_3\} \models (x_1 \vee x_3)$,
  Beweise (lt. Def.) z.B. durch Vergleich der Wertetabellen (d.h., explizites Aufzählen der Modellmengen)

Eigenschaften (Übungsaufgaben):

- $M \models \text{True}$
- $(M \models \text{False}) \iff (\operatorname{Mod}(M) = \emptyset)$
- $(M \models F) \iff (\operatorname{Mod}(M \cup \{\neg F\}) = \emptyset)$
- wird bei CDCL benutzt: wir lernen nur Klauseln F, die aus der CNF (Klauselmenge) M folgen:
  $(M \models F) \iff (\operatorname{Mod}(M) = \operatorname{Mod}(M \cup \{F\}))$

Resolution

- Definition: für Literal l : die *Resolvente* $\text{Res}_l(c, d)$

  der Klausel c mit $l \in c$, und der Klausel d mit $\neg l \in d$:

  ist die Klausel $(c \setminus \{l\}) \cup (d \setminus \{\neg l\})$.
- Bsp. $l = \overline{x_2}, c = (x_1 \vee \overline{x_2}), d = (x_2 \vee x_3)$,

  $\text{Res}_l(c, d) = (x_1 \vee x_3)$.
- Satz: $\{c, d\} \models \text{Res}_l(c, d)$.
- Beweis: für jede Belegung $b \in \operatorname{Mod}(c, d)$:

  vollst. Fallunterscheidung: $b(l) = 0$ oder $b(l) = 1$.
- Anwendung: Hinzufügen einer Resolvente ändert die Modellmenge nicht, kann Propagationen ermöglichen

DPLL mit CDCL (Plan)

conflict driven clause learning –
bei jedem Konflikt eine Klausel C hinzufügen, die

- aus der Formel folgt (d.h. Modellmenge nicht ändert)
- den Konflikt durch Propagation verhindert

Eigenschaften/Anwendung:

- danach *backjump* zur vorletzten Variable in C.
  (die letzte Variable wird dann propagiert, das ergibt die richtige Fortsetzung der Suche)
- C führt hoffentlich auch später zu Propagationen, d.h. Verkürzung der Suche
- ... wenn nicht: gelernte Klauseln kann man auch vergessen

Naives Lernen

- jede partielle Belegung b mit $\operatorname{dom}(b) = \{v_1, \dots, v_k\}$

  entspricht einer Konjunktion

  $B = (v_1 \leftrightarrow b(v_1)) \wedge \dots \wedge (v_k \leftrightarrow b(v_k))$
- beim Lösen der Formel (Klauselmenge) F:
- Konflikt bei partieller Belegung b:

  man kann $C = \neg B = (\neg(v_1 \leftrightarrow b(v_1)) \vee \dots \vee \neg(v_k \leftrightarrow b(v_k))$ lernen

  Beweis: zu zeigen ist $F \models C$, folgt aus $\operatorname{Mod}(F \cup \{B\}) = \emptyset$
- ... sollte man aber nicht, denn C ist mglw. zu groß (enthält Literale, die am Konflikt gar nicht beteiligt sind)

Lernen (Implementierung) und Backjump

- benutze (resolviere) Klauseln, die seit der letzten Entscheidung für Propagationen verwendet wurden.
-
  ```
  c := Konflikt-Klausel // für aktuelle Bel. b
  while (...) { // inv: für alle l' in c: b(l')=0
    l := das in c zuletzt belegte Literal
    d := Unit-Klausel, durch die var(l) belegt wurde
    c := resolve_l (c,d); }
  ```
  diese Resolution ist immer möglich, denn es gilt
  $b(l) = 0, l \in c$ (ist Konflikt), $b(\overline{l}) = 1, \overline{l} \in d$ (ist Unit)
- Schleife verlassen (und c lernen), wenn c nur noch ein Literal l_h der aktuellen Entscheidungstiefe enthält.
- dann Backjump zu nächst-höherer Entscheidung in c. von dort wird $\overline{l_h}$ unit-propagiert.

Variablen-Elimination durch vollst. Resolution

- für Formel (Klauselmenge) F und Variable v:
  $\text{Pos}_v(F) = \{c \mid c \in F, v \in c\}$; $\text{Neg}_v(F) = \{c \mid c \in F, \neg v \in c\}$
  $\text{Res}_v(F) = \bigcup_{p \in \text{Pos}_v(F), n \in \text{Neg}_v(F)} \text{Res}_v(p, n)$
- Satz: F ist erfüllbarkeitsäquivalent zu G mit $G := F \setminus (\text{Pos}_v(F) \cup \text{Neg}_v(F)) \cup \text{Res}_v(F)$.
- das (iteriert) ist ein vollständiges Lösungsverfahren!
  aber unpraktisch, weil $|G| \gg |F|$ möglich ist:
  $|G| = |F| - (|\text{Pos}_v(F)| + |\text{Neg}_v(F)|) + |\text{Pos}_v(F)| \cdot |\text{Neg}_v(F)|$.
- Anwendung: für solche v, für die $|G| \le |F| + \Delta$
- Quelle: Een und Biere: *Effective Preprocessing ...*, SAT 2005, `http://minisat.se/downloads/SatELite.pdf`
  dort weitere Vorverarbeitungs-Verfahren

Aufgaben

1. (Knuth Aufgabe 254) Für $\{12, \overline{1}3, 2\overline{3}, \overline{24}, \overline{3}4\}$: nach der Entscheidung 1: welche Klausel wird gelernt?

   D. E. Knuth, TAOCP Vol. 4, Fasc. 6, *Satisfiability*, 2015.
2. Schleife verlassen, wenn c nur noch ein Literal der aktuellen Entscheidungstiefe ... :

(a) wieso ist die Bedingung anfangs falsch? (es kann nicht sein, daß die originale Konflikt-Klausel c gelernt wird)
(b) wieso wird diese Bedingung wahr? (es kann nicht sein, daß es immer ≥ 2 solche Literale sind oder plötzlich gar keines)
(c) wieso wird immer eine Klausel gelernt, die bisher nicht zur Klauselmenge gehört?

3. für eine Teilformel F wird die Tseitin-Transformation durchgeführt und für die dabei entstehende Variable v_F (mit $v_f \leftrightarrow F$) ein assert.

   Was passiert bei vollständiger Elimination von v_F?

   (Es ist anzunehmen, daß das alle Solver tun. Deswegen ist für `ersatz` wohl keine Plaisted-Greenbaum-Transformation (J. Symb. Comp. 2(3) 1986, pp 293-304) `https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80028-1` notwendig.)

4. Wenn G aus F durch vollständige Resolution (Elimination) von v entsteht: Konstruieren Sie aus einem Modell b für G ein Modell für F (wie ist v zu belegen?)

5. für eine unerfüllbare Schubfachschluß-Formel (in jeder Zeile $1, \ldots, H$ höchstens einer wahr, in jeder Spalte $1, \ldots, B$ wenigstens einer wahr, z.B. für $B = 3, H = 2$ die Klauselmenge $\{\overline{12}, \overline{13}, \overline{33}, \overline{45}, \overline{46}, \overline{56}, 12, 34, 56\}$

   einen möglichst kurzen Beweis der Unerfüllbarkeit

   (a) mit DPLL (ohne Lernen)
   (b) mit DPLL und CDCL
   (c) ... und vorheriger Variablen-Elimination
   (d) ... *nur* mit Variablen-Elimination (ohne DPLL)

6. eine nicht erfüllbare 2SAT-Formel (jede Klausel genau zwei Literale) angeben, für die DPLL möglichst lange braucht. Vergleichen mit DPLL + CDCL, Variablen-Elimination.

7. (Knuth Aufgabe 378) *blocked clause elimination*:

   Für Klauselmenge F: eine Klausel $C = (l \vee l_1 \vee \cdots \vee l_k)$

   heißt *blockiert durch Literal* l,

   falls für jede Klausel $D \in F$ mit $\bar{l} \in D$ gilt: $\exists i : \overline{l_i} \in D$.

   (a) ein Beispiel angeben.
   (b) beweisen: $F \setminus \{C\}$ erfüllbar $\Rightarrow F$ erfüllbar.
   (c) ist jedes Modell b von $F \setminus \{C\}$ auch ein Modell von F?

8. *conflict clause minimization* (Sörenson, SAT 2005, `http://minisat.se/downloads/MiniSat_v1.13_short.pdf`): Ein Beispiel angeben. Entsprechende Ergänzung der autotool-Aufgabe vorschlagen.

9. hier besprochene Heuristiken und Ergänzungen

- in den Protokollen von minisat, kissat wiederfinden (z.B. wieviele Klauseln werden gelernt? wie groß sind diese? wann vergessen?)
- durch Optionen von kissat an/abschalten

Anzahl-Constraints

Definition, Motivation

- Count$_{\le k}(x_1,\dots,x_n) := (\sum_i x_i) \le k$.
- AMO (at most one): $=$ Count$_{\le 1}$, entspr. ALO, EXO
- Schubfach-Constraint (als Testfall, erfüllbar gdw. $B \le H$)

  $\bigwedge_{1\le i\le H}$ AMO$(x_{ij} | 1 \le j \le B) \wedge \bigwedge_{1\le j\le B}$ ALO$(x_{ij} | 1 \le i \le H)$
- Schubfach für $B = H$: dann ist x Permutationsmatrix, repräsentiert Bijektion von $\{1,\dots,B\}$ auf sich
- Anwend.: Rösselsprung, Hamiltonkreis in $G = (V, E)$

  Pfad p in G als Bijektion von Indexmenge $\{1,\dots,|V|\}$ in Knotenmenge V mit $\bigwedge_i (p(i), p(i+1)) \in E$.

SAT-Kodierung eines Rösselsprungs

```
let n = height * width; places = [0 .. n-1]

let decode p = divMod p width
    edge p q =
        let (px,py) = decode p; (qx,qy) = decode q
        in  5 == (px-qx)^2 + (py-qy)^2
    rotate (x:xs) = xs <> [x]

a <- replicateM n $ replicateM n $ exists @Bit
assert $ all exactly_one a
assert $ all exactly_one $ transpose a
assert $ flip all (zip a $ rotate a) $ \ (e, f) ->
  flip all places $ \ p ->  e!!p  ==>
    flip any (filter (edge p) places) (\ q -> f!!q)
```


SAT-Kodierungen von AMO (I)

- naiv, quadratisch:
  AMO$(x_1,\dots,x_n) = \bigwedge\{\overline{x_i} \vee \overline{x_j} | 1 \le i < j \le n\}$

  $\binom{n}{2}$ Klauseln, keine zusätzlichen Variablen
- linear: mit Kodierung enc : $x \mapsto (x_e, x_z) = (x \ge 1, x \ge 2)$:

  $0 \mapsto (0,0), 1 \mapsto (1,0), 2, 3, \dots \mapsto (1,1)$

  Addition: $(x_e, x_z) +_{\text{enc}} (y_e, y_z) = \dots$

  so daß enc$(x+y) =$ enc$(x) +_{\text{enc}}$ enc(y)

  AMO$(x_1,\dots,x_n) =$ `let` $(s_e, s_z) = \sum_{\text{enc}}$ enc(x_i) `in ...`

  das sind $2n$ Hilfsvariablen, aber bei `assert (amo xs)` werden n davon eliminiert durch Vorverarbeitung oder UP

SAT-Kodierungen von AMO (II) - log

- AMO$(x) = \exists h : (x_i \Rightarrow (i = h))$

  h binär repräsentiert mit $\log n$ Bits.
- Bsp. AMO$(x_0,\dots,x_3) = \exists h_1, h_0 :$
$$\begin{array}{ll} & (\overline{x}_0 \vee \overline{h}_1) \wedge (\overline{x}_0 \vee \overline{h}_0) \\ \wedge & (\overline{x}_1 \vee \overline{h}_1) \wedge (\overline{x}_1 \vee h_0) \\ \wedge & (\overline{x}_2 \vee h_1) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{h}_0) \\ \wedge & (\overline{x}_3 \vee h_1) \wedge (\overline{x}_3 \vee h_0) \end{array}$$
- $n \log n$ Klauseln, $\log n$ zusätzliche Variablen
- die Hilfsvariablen h_0, h_1 sind keine Funktionen der Eingangsvariablen.

  (wenn alle x_i falsch, dann h_i beliebig)

Propositionale vs. Funktionale Kodierungen

- Kodierung einer Booleschen Funktion F mit Variablen V durch Formel G mit Variablen $V \cup H$ heißt ...
  (Vorsicht: folgende Bezeichnungen sind nicht Standard)
  - *propositional* (ist der Oberbegriff): G und F erfüllbarkeitsäquivalent und belegungs-erhaltend: für all b gilt: $b \models F \iff \exists b' : b \subseteq b' \wedge b' \models G$
  - *funktional*: propositional und für jedes $b \models F$ gibt es *genau ein* b' ... Belegung von H ist eine *Funktion* der Bel. von V, kann durch *Schaltkreis* realisiert werden
- Negation von Schaltkreis ist Schaltkreis, Negation von $\exists b' : G$ ist $\forall b' : \neg G$, das ist kein Erfüllbarkeitsproblem!
  Bsp: Count$_{>1}(x) = \neg$Count$_{\le 1}(x) = \neg$AMO(x)
  mit log-Kodierung von AMO ergibt das $\forall b_1, b_0 : \dots$

Propositional vs. Funktional

- oft ist $V = E \cup A$ (disjunkt),
  $E =$ Eingabe-, $A =$ Ausgabe-Variablen,
  Def: funktional *bezüglich* E: Belegung von A (und H) ist Funktion der Belegung von E
- mein Eindruck: publiziert werden überwiegend propositionale Kodierungen (PK). `ersatz` benutzt sehr oft FK. Das scheint einfacher und paßt besser zu Haskell. Ist es ein Nachteil beim Constraint-Schreiben/Lösen?
- viele publizierte PK entstehen aus geeigneter FK nach Vorberarbeitung und UP. (Ü: für log-AMO)
- Forschungsfrage: wo geht das scheinbar nicht?
  (und bei genauer Betrachtung dann vielleicht doch?)

Praktische Eigenschaften von Kodierungen (I)

- für CNF F auf Variablen $V = \{v_1,\dots,v_n\}$:

  Definition: F *erkennt Widersprüche durch UP (unit prop.)*:

  für jede partielle Belegung b gilt:

  wenn keine vollst. Belegung $b' \supseteq b$ existiert mit $b' \models F$,

  dann führt UP auf F von b aus zu einem Konflikt
- Bsp: $F = \{123, \overline{1}\overline{2}, 1\overline{2}\overline{3}, 2\overline{3}, \overline{2}3\}$, $b = \{\overline{1}\}$.
- Ü: gilt diese Eigenschaft für die log-Kodierung von AMO?

  Zu betrachten ist eine Belegung $b = \{(x_i, 1), (x_j, 1)\}$.

  Wird durch UP ein Konflikt erreicht?

Praktische Eigensch. (II) – Forcing

- für CNF F auf Variablen $V = \{v_1,\dots,v_n\}$ und Hilfsvariablen H:

  Def.: F ist *(generalized) arc-consistent (GAC)* (*forcing*):

  für jede partielle Belegung b mit $\operatorname{dom} b \subseteq V$

  und jedes $v \in V$ mit $v \notin \operatorname{dom} b$:

  wenn v in allen Modellen $b' \supseteq b$ von F den gleichen Wert hat, dann folgt dieser Wert bereits durch UP.
- Bsp: log-Kodierung von AMO(x): Betrachte $b = \{(x_i, 1)\}$.

  Alle anderen x_j müssen dann falsch sein.

  Wird das durch UP erreicht?

SAT-Kodierungen von AMO (III) - sqrt

- für AMO(x): die x in einem Rechteck anordnen,

  $z_i := \bigvee_j x_{ij}$ (Zeile i), $s_j := \bigvee_i x_{ij}$ (Spalte j),

  dann AMO$(x) =$ AMO$(z) \wedge$ AMO(s).

  Jingchao Chen: *A New SAT Encoding of the At-Most-One Constraint* 10th Workshop Constraint Modeling and Reformulation, 2010 `https://www.it.uu.se/research/group/astra/ModRef10/programme.html`
- Formelgröße $f(n) = \Theta(n) + 2f(\sqrt{n})$, mit $\Theta(\sqrt{n})$ Hilfsvar.

  Lineare Faktoren sind klein. Ü: wenn `assert (amo xs)`, kann man einige Klauseln weglassen. Welche?
- Ü: ist das forcing?

Aufgaben

1. Vergleiche Sie die *commander*-Kodierung für AMO von Klieber und Kwon, Int. Workshop on Constraints in Formal Verification, 2007, mit Kodierungen aus dem Skript.

   a) auf dem Papier, b) praktisch: mit ersatz implementieren, Formelgrößen messen, auch nach Vorverarbeitung durch minisat
2. Für die commander-Kodierung und die sqrt-Kodierung: prüfen Sie, ob die im im Paper angegebene PK tatsächlich aus unserer FK (Beispiel-Quelltexte) entsteht.

   Sehen Sie sich kleine AMO-Formeln an, vermessen Sie größere mittels mini/kissat (Logging des Preprocessing)

3. Für die sqrt-Kodierung für AMO von Chen 2010:

   Benutzen Sie die gleiche Idee für eine höherdimensionale Anordnung, z.B. AMO von 30 Variablen als $2 \times 3 \times 5$.

   Teilen Sie AMO für 2^n Variablen in $2 \times \cdots \times 2$ ein und vergleichen Sie mit der log-Kodierung.

   (sqrt-AMO ist funktional, log-AMO ist es im Original nicht, aber mit dieser Herleitung doch?)
4. für die lineare AMO-Kodierung (Addition auf $\{0, 1, \geq 2\}$):

   untersuchen Sie den Unterschied zwischen der Verwendung von `foldr` und `foldb`
5. für jede der betrachteten AMO-Kodierungen: wie kann mit möglichst wenig Zusatz-Aufwand EXO erhalten?

6. Für den Rösselsprung:

   - zusätzliches `assert $ a !! 0 !! 0` diskutieren und ausprobieren
   - AMO und ALO durch EXO ersetzen
   - umbauen, so daß ein kreuzungsfreier Weg der Länge $= l$ (zusätzlicher Eingabe-Parameter) beschrieben wird.
   - andere Kodierung für Hamiltonkreis: Neng-Fa Zhou: *In Pursuit of an Efficient SAT Encoding for the Hamiltonian Cycle Problem*, CP 2020, ModRef 2019, `https://www.sci.brooklyn.cuny.edu/~zhou/`
7. Ist die Kodierung des Halb-Addierers HA$(x, y; c, r)$ durch $(r \leftrightarrow x \oplus y) \wedge (c \leftrightarrow x \wedge y)$ (Tseitin-Kodierung ohne weitere Hilfsvariablen) forcing?

Ist die Kodierung des Voll-Addierers FA$(x, y, z; c, r)$ durch HA$(x, y; c_1, r_1) \wedge$ HA$(r_1, z; c_2, r) \wedge (c \leftrightarrow c_1 \vee c_2)$ forcing?

Desgl. für die Kodierung von ITE$(i, t, e; x)$ (if-then-else) durch $(i \wedge t \to x) \wedge (i \wedge \overline{t} \to \overline{x}) \wedge (\overline{i} \wedge e \to x) \wedge (\overline{i} \wedge \overline{e} \to \overline{x})$

Lesen Sie dazu auch Een und Sörenson: *Translating Pseudo-Boolean Constraints into SAT*, JSAT 2006, (`http://minisat.se/Papers.html`) Abschnitt 5.1.

Vergleichen Sie mit den Quelltexten von ersatz.

8. (Vorfreude, schönste ...) (ab 1. Dezember) `https://www.mathekalender.de/wp/de/kalender/`

Prädikatenlogik

Plan

(für den Rest der Vorlesung)

- Prädikatenlogik (Syntax, Semantik)
- existentielle konjunktive Constraints

  in verschiedenen Bereichen, z. B.

  Gleichungen und Ungleichungen auf Zahlen $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$
- beliebige Boolesche Verknüpfungen

  SAT modulo T ($=$ SMT), DPLL(T)
- Bit-blasting (SMT $\to$ SAT)

Syntax der Prädikatenlogik

- Signatur: Name und Stelligkeit für
  - Funktions-
  - und Relationssymbole
- Term:
  - Funktionssymbol mit Argumenten (Terme)
  - Variable
- Formel
  - atomar: Relationssymbol mit Argumenten (Terme)
  - Boolesche Verknüpfungen (von Formeln)
  - Quantor Variable Formel
- – gebundenes und freies Vorkommen von Variablen
  - Sätze ($=$ geschlossene Formeln)

Semantik der Prädikatenlogik

- Universum, Funktion, Relation,
- Struktur, die zu einer Signatur paßt
- Belegung, Interpretation
- Wert
  - eines Terms
  - einer Formel

  in einer Struktur, unter einer Belegung

die Modell-Relation $(S, b) \models F$ sowie $S \models F$
Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit (Def, Bsp)

Theorien

Def: $\mathrm{Th}(S) := \{F \mid S \models F\}$
(Die Theorie einer Struktur S ist die Menge der Sätze, die in S wahr sind.)

Bsp: „$\forall x : \forall y : x \cdot y = y \cdot x$“ $\in \mathrm{Th}(\mathbb{N}, 1, \cdot)$

Für K eine Menge von Strukturen:
Def: $\mathrm{Th}(K) := \bigcap_{S \in K} \mathrm{Th}(S)$
(die Sätze, die in jeder Struktur aus K wahr sind)

Bsp: „$\forall x : \forall y : x \cdot y = y \cdot x$“ $\notin \mathrm{Th}(\text{Gruppen})$
... denn es gibt nicht kommutative Gruppen, z.B. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

Unentscheidbarkeit

- (Alonzo Church 1938, Alan Turing 1937)
  Das folgende Problem ist nicht entscheidbar:
  - Eingabe: eine PL-Formel F
  - Ausgabe: *Ja*, gdw. F allgemeingültig ist.
- Beweis: kodiert das Halteproblem für ein universelles Berechnungsmodell als eine Wahrheitsproblem der PL
  Rechnung einer Turingmaschine kodiert durch 2-stellige Funktion $f(i, t) =$ der Inhalt von Zelle i zur Zeit t.
- diese mathematische Fragestellung (von David Hilbert, 1928) begründet die Wissenschaft der Informatik.
  (die Berechenbarkeits-Theorie)

Folgerungen aus Unentscheidbarkeit

Suche nach (effizienten) Algorithmen für Spezialfälle
(die trotzdem ausreichen, um interessante Anwendungsprobleme zu modellieren)

- Einschränkung der Signatur (Bsp: keine F.-S., nur einstellige F.-S, nur einstellige Rel.-S.)
- Einschränkung der Formelsyntax
  - nur bestimmte Quantoren, nur an bestimmten Stellen (im einfachsten Fall: ganz außen existentiell)
  - nur bestimmte Verknüpfungen (Bsp: nur durch $\wedge$)
- Einschränkung auf Theorien von gegebenen Strukturen
  Bsp: $F \in \mathrm{Th}(\mathbb{N}, 0, +)$? $G \in \mathrm{Th}(\text{Gruppen})$

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Syntax, Semantik

- lin. (Un-)Gleichungssystem $\to \bigwedge_{i=1}^{n}$ Constraint
- Constraint $\to$ Ausdruck Relsym Ausdruck
- Relsym $\to \ = \ \mid \ \le \ \mid \ \ge$
- Ausdruck $\to$ Zahl $+ \sum_{i=1}^{n}$ (Zahl $\cdot$ Unbekannte)
- Zahlenbereich: $\mathbb{Q}$ (rational)

Beispiel: $4y \le x \wedge 4x \le y - 3 \wedge x + y \ge 1 \wedge x - y \ge 2$

Semantik: Wertebereich für Unbekannte ist $\mathbb{Q}$ (äquiv: $\mathbb{R}$)

Normalformen

- Beispiel:
  $4y \le x \wedge 4x \le y - 3 \wedge x + y \ge 1 \wedge x - y \ge 2$
- Normalform: $\bigwedge_i \sum_j a_{i,j} x_j \ge b_i$

$$\begin{aligned} x - 4y &\ge 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

- Matrixform: $Ax^T \ge b^T$
  A ist linearer Operator.

Lösung von linearen (Un-)Gl.-Sys. mit Methoden der linearen Algebra

Hintergründe

Warum funktioniert das alles?

- lineares Gleichungssystem:
  Lösungsmenge ist (verschobener) *Unterraum*, endliche Dimension
- lineares Ungleichungssystem:
  Lösungsmenge ist *Simplex* (Durchschnitt von Halbräumen, konvex), endlich viele Seitenflächen

Wann funktioniert es nicht mehr?

- nicht linear: keine Ebenen
- nicht rational, sondern ganzzahlig: Lücken

Lineare Gleichungssysteme

- Lösung nach Gauß-Verfahren:
  eine Gleichung nach einer Variablen umstellen,
  diese Variable aus den anderen Gleichungen eliminieren
  ($=$ Dimension des Lösungsraumes verkleinern)
- Ü: es gibt kein solches Verfahren für CNF-SAT (es gibt keine Operation, die der Subtraktion entspricht)
  ... aber für XOR-SAT (Konjunktion von XOR-Klauseln)
- Mate Soos, Karsten Nohl, Claude Castelluccia: *Extending SAT Solvers to Cryptographic Problems* SAT 2009 `https://github.com/msoos/cryptominisat`
  ... we extended the solver's input language to support the XOR operation

Lineare Ungleichungen und Optimierung

Entscheidungsproblem:

- Eingabe: Constraintsystem,
- gesucht: eine erfüllende Belegung

Optimierungsproblem:

- Eingabe: Constraintsystem und *Zielfunktion* (linearer Ausdruck in Unbekannten)
- gesucht: eine optimale erfüllende Belegung (d. h. mit größtmöglichem Wert der Zielfunktion)

Standard-Form des Opt.-Problems:
$A \cdot x^T = b, x^T \ge 0$, minimiere $c \cdot x^T$.

Ü: reduziere OP auf Standard-OP, reduziere EP auf OP

Lösungsverfahren für lin. Ungl.-Sys.

- Simplex-Verfahren (für OP)

  Schritte wie bei Gauß-Verfahren für Gleichungssysteme ($=$ entlang einer Randfläche des Simplex zu einer besseren Lösung laufen)

  Einzelheiten siehe Vorlesung Numerik/Optimierung

  exponentielle Laufzeit im schlechtesten Fall (selten)
- Ellipsoid-Verfahren (für OP): polynomiell
- Fourier-Motzkin-Verfahren (für EP)

  vgl. mit Elimination durch vollständige Resolution

  exponentielle Laufzeit (häufig)

Beispiel LP: monotone Interpretation

- Beispiel: das Wortersetzungssystem $R = \{aa \to bbb, bb \to a\}$ terminiert.
- Beweis: definiere $h : \Sigma \to \mathbb{N} : a \mapsto 5, b \mapsto 3$

  und setze fort zu $h^* : \Sigma^* \to \mathbb{N} : h(c_1 \ldots c_n) = \sum h(c_i)$.

  Dann gilt $u \to_R v \Rightarrow h^*(u) > h^*(v)$ wegen $\forall (l \to r) \in R : h^*(l) > h^*(r)$.
- Die Gewichtsfunktion h erhalt man als Lösung des linearen Ungleichungssystems

  $2a > 3b \wedge 2b > a \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0.$

Beispiel LP-Solver

- Aufgabenstellung im LP-Format (`http://lpsolve.sourceforge.net/5.0/CPLEX-format.htm`)

```
Minimize
 obj: a + b
Subject To
 c1: 2 a - 3 b >= 1
 c2: 2 b -   a >= 1
End
```

- mit `https://projects.coin-or.org/Clp` lösen:

```
clp check.lp solve solu /dev/stdout
```


Fourier-Motzkin-Verfahren

Def.: eine Ungls. ist in x-Normalform, wenn jede Ungl.

- die Form „x ($\leq \mid \geq$) (Ausdruck ohne x)“ hat
- oder x nicht enthält.

Satz: jedes Ungls. besitzt äquivalente x-Normalform.

Def: für Ungls. U in x-Normalform:
$U_x^\downarrow := \{A \mid (x \geq A) \in U\}$, $U_x^\uparrow := \{B \mid (x \leq B) \in U\}$,
$U_x^- = \{C \mid C \in U, C$ enthält x nicht$\}$.

Def: (x-Eliminations-Schritt) für U in x-Normalform:
$U \to_x \{A \leq B \mid A \in U_x^\downarrow, B \in U_x^\uparrow\} \cup U_x^-$

Satz: (U erfüllbar und $U \to_x V$) $\iff$ (V erfüllbar).

FM-Verfahren: Variablen nacheinander eliminieren.

Aufgaben

1. Finden Sie eine monotone Interpretation durch eine Gewichtsfunktion für das Wortersetzungssystem

   ```
   (RULES
   a a a -> b b,
   b b b -> c d ,
   c -> a a ,
   d -> c )
   ```

   (Quelle: SRS/Zantema/z116.srs aus `https://www.lri.fr/~marche/tpdb/tpdb-2.0/`, vgl. `https://termination-portal.org/wiki/TPDB`)

   Stellen Sie das passende Ungleichungssystem auf, geben Sie eine (geratene) Lösung an.
2. Führen Sie das Fourier-Motzkin-Verfahren für dieses Ungleichungssystem durch.
3. Bestimmen Sie eine Lösung mit GLPK
4. Bestimmen Sie eine Lösung mit hmatrix-glpk.
5. Finden Sie weitere Systeme aus SRS/Zantema/z101 . . . z112 mit Gewichtsfunktion.

   Vergleichen Sie mit den Lösungen, die in der letzten Termination Competition gefunden wurden. `https://termination-portal.org/wiki/Termination_Competition`

   Vorverarbeitung eines Terminationsproblems durch

   sparse tiling, dann Gewichtsfunktion: siehe Geser, Hofbauer, Waldmann FSCD 2019 `https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10528/`
6. cryptominisat benutzen (Beispiele), verstehen (Paper lesen, wie wird DPLL/CDCL für XOR-Klauseln angepaßt?)

(Integer/Real) Difference Logic

Motivation, Definition

- viele Scheduling-Probleme enthalten:
  - Tätigkeit i dauert d_i Stunden
  - i muß beendet sein, bevor j beginnt.
- das führt zu Constraintsystem:
  - Unbekannte: $t_i =$ Beginn von i
  - Constraints: $t_i \leq t_j - d_i$
- das ist Spezialfall eines linearen Ungleichungssystems,

  mit einfachem Lösungsverfahren,

  wird später verwendet als Unterprogramm in DPLL(T)

Constraint-Graphen für IDL

- Für gegebenes IDL-System S konstruiere gerichteten kantenbewerteten Graphen G
  - Knoten i = Unbekannte t_i
  - gewichtete Kante $i \xrightarrow{d} j$, falls Constraint $t_i \le t_j + d$

  beachte: Gewichte $d \in \mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$, ist äquivalent)

  (Ü: wenn alle ≥ 0: Problem ist trivial lösbar. Wie?)
- Satz: S lösbar $\iff$ G besitzt keinen gerichteten Kreis mit negativem Gewicht.

  (Implikation $\Rightarrow$ ist offensichtlich, wir brauchen $\Leftarrow$)
- Ansatz: t_i = minimales Gewicht aller Wege von 1 zu i

  Diskussion: min existiert nicht? Weg existiert nicht?

Kürzeste Wege in Graphen

- (single-source shortest paths)
  - Eingabe:
    - gerichteter Graph $G = (V, E)$
    - Kantengewichte $w : E \to \mathbb{R}$
      äquivalent: Matrix $w : V \times V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
    - Startknoten $s \in V$
  - Ausgabe: Funktion $D : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $\forall x \in V : D(x)$ = minimales Gewicht aller Wege von s nach x
- der bekannte (und schnelle) Algorithmus von Dijkstra funktioniert nur, falls $\forall i, j : w(i, j) \ge 0$ (Ü: Beispiel)

  Lösung: Algorithmus von Bellmann (1958), Ford (1956)

Lösungsidee

iterativer Algorithmus mit *Zustand* $d : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$d(s) := 0, \forall x \ne s : d(x) := +\infty$

while es gibt eine Kante $i \xrightarrow{w_{i,j}} j$ mit $d(i) + w_{i,j} < d(j)$

    $d(j) := d(i) + w_{i,j}$ // Kante ij wird entspannt

jederzeit gilt die *Invariante*:

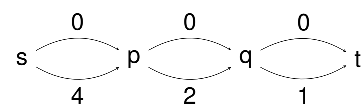
- $\forall x \in V$: es gibt einen Weg von s nach x mit Gewicht $d(x)$
- $\forall x \in V : D(x) \le d(x)$.

verbleibende Fragen:

- Korrektheit (falls Termination)
- Auswahl der Kante (aus mehreren Kandidaten)
- Termination, Laufzeit

Laufzeit

- exponentiell viele Relaxations-Schritte:



- besser (polynomiell): Bellman-Ford

  for i from 1 to $|V|$: jede Kante $e \in E$ einmal entspannen

  dann testen, ob alle Kanten entspannt sind.
  (d. h. $d(j) \ge d(i) + w_{i,j}$)

  Wenn nein, dann existiert negativer Kreis. (Beweis?)
- Dijkstra ist schneller, aber nur bei Gewichten ≥ 0 korrekt

Ganzzahlige lineare Ungleichungen

(Mixed) Integer Programming

- “linear program” (LP): lineares Ungleichungssystem mit Unbekannten aus $\mathbb{Q}$
- “integer program” (IP): lineares Ungleichungssystem, mit Unbekannten aus $\mathbb{Z}$
- “mixed integer program” (MIP): lineares Ungleichungssystem, mit Unbekannten aus $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$
- die Komplexität steigt: LP $\in$ P, MIP $\in$ NPc
- mit MIP kann man Boolesche Constraints simulieren

  …sollte man aber nicht: Boolesche Lösungsverfahren (DPLL, CDCL) sind besser als numerische

MIP-Beispiel

LP-Format mit Abschnitten

- `General` für ganzzahlige Unbekannte
- `Binary` für Unbekannte in $\{0, 1\}$

```
Minimize  obj: y
Subject To
 c1: 2 x  <= 1
 c2: - 2 x + 2 y <= 1
 c3:  2 x + 2 y >= 1
General  x y
End
```

Lösen mit `https://projects.coin-or.org/Cbc`:

`cbc check.lp solve solu /dev/stdout`

Ü: ausprobieren und erklären: nur x, nur y ganzzahlig

MIP-Lösungsverfahren

- Ansatz: ein MIP M wird gelöst,

  indem eine Folge von LP $L_1, \ldots$ gelöst wird.
- Def: *Relaxation* $R(M)$: wie M, alle Unbekannten reell.
- *Einschränkung*: für eine ganze Unbekannte x_i

  falls $\max\{x_i \mid \vec{x} \in \mathrm{Mod}(R(M))\} = B < \infty$,

  füge Constraint $x_i \le \lfloor B \rfloor$ hinzu
- *Fallunterscheidung (Verzweigung)*:

  wähle eine ganze Unbekannte x_i und $B \in \mathbb{R}$ beliebig:

  $\mathrm{Mod}(M) = \mathrm{Mod}(M \cup \{x_i \le \lfloor B \rfloor\}) \cup \mathrm{Mod}(M \cup \{x_i \ge \lceil B \rceil\})$

  entspricht *decide* in DPLL — aber es gibt kein CDCL

SAT als IP, Komplexität von IP

- es gilt SAT $\le_P$ IP

  Beweis durch Funktion T : CNF $\to$ IP mit
  - T ist in Polynomialzeit berechenbar
  - $\forall F \in$ CNF : F erfüllbar $\iff$ $T(F)$ lösbar

  Lösungsidee:
  - Variablen von $T(F)$ = Variablen von F
  - Wertebereich der Variablen ist $\{0, 1\}$
  - Negation durch Subtraktion, Oder durch Addition, Wahrheit durch ≥ 1
- Folgerung: aus SAT $\in$ NPc folgt IP $\in$ NPc,

  deswegen kein IP- oder MIP-Solver in Polynomialzeit (oder P = NP = 1 Million Dollar)

Travelling Salesman als MIP

(dieses Bsp. aus Papadimitriou und Steiglitz: *Combinatorial Optimization*, Prentice Hall 1982)

Travelling Salesman:

- Instanz: Gewichte $w : \{1, \ldots, n\}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ und Schranke $s \in R_{\geq 0}$
- Lösung: Rundreise mit Gesamtkosten $\leq s$

Ansatz zur Modellierung:

- Variablen $x_{i,j} \in \{0, 1\}$, Bedeutung: $x_{i,j} = 1 \iff$ Kante (i, j) kommt in Rundreise vor
- Zielfunktion?
- Constraints — reicht das: $\sum_i x_{i,j} = 1, \sum_j x_{i,j} = 1$?

Travelling Salesman als MIP (II)

Miller, Tucker, Zemlin: *Integer Programming Formulation and Travelling Salesman Problem* JACM 7(1960) 326–329

- zusätzliche Variablen $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$
- Constraints C: $\forall 1 \leq i \neq j \leq n : u_i - u_j + nx_{i,j} \leq n - 1$

Übung: beweise

- für jede Rundreise gibt es eine Belegung der u_i, die C erfüllt.
- aus jeder Lösung von C kann man eine Rundreise rekonstruieren.

Was ist die anschauliche Bedeutung der u_i?

min und max als MIP

- kann man den Max-Operator durch lin. Ungln simulieren?

  (gibt es äq. Formulierung zu $\max(x, y) = z$?)
- Ansatz: $x \leq z \wedge y \leq z \wedge (x = z \vee y = z)$,

  aber das *oder* ist verboten.

Idee zur Simulation von $A \leq B \vee C \leq D$:

- neue Variable $f \in \{0, 1\}$
- Constraint $A \leq B + \ldots \wedge C \leq D + \ldots$

  falls eine obere Schranke S für die Werte von A, B, C, D bekannt ist

Übungen zu DL, MIP (für KW 53)

- Beispiel für Dijkstra, Bellmann-Ford
- Diskussion, Beispiel für TSP als MIP
- Formulierung eines SAT-Problems als IP, Lösung mit CBC.
- Überdeckungsproblem (möglichst wenige Damen, die das gesamte Schachbrett beherrschen) as IP,

  Constraint-System programmatisch erzeugen, z.B. `https://hackage.haskell.org/package/limp`, Lösen mit `https://hackage.haskell.org/package/limp-cbc`
- Auswertung Adventskalender, Planung Projekte

SMT (Satisfiability Modulo Theories)

Definition, Lösungsverfahren (Plan)

- Erfüllbarkeitsproblem für beliebige boolesche Kombination von atomaren Formeln aus einer Theorie

  Beispiel: $(x \geq 3 \vee \neg(x + y \leq 4)) \leftrightarrow x > y$
- Verfahren: 1. (wirklich) ersetze jedes T-Atom a_i durch eine boolesche Unbekannte u_i, erhalte Formel F

  2. (naiv) für jedes boolesche Modell $b \models F$: entscheide, ob die Konjunktion der entsprechenden (ggf. negierten) Atome in T erfüllbar ist
- (2. besser) *DPLL modulo Theory*: Verschränkung der booleschen Suche mit T-Erfüllbarkeit für partielle Modelle

SMT-{LIB,COMP}

- Standard-Modellierungssprache, Syntax/Semantik-Def: `https://smtlib.cs.uiowa.edu/standard.shtml`
- Aufgabensammlung: `https://smtlib.cs.uiowa.edu/benchmarks.shtml` Kombinatorik, Scheduling, Hard- und Software-Verifikation, ... crafted, industrial, (random?)
- Wettbewerb: `https://smt-comp.github.io/`
- typische Solver (Beispiele)
  - Z3 (Nikolas Bjorner, Leo de Moura et al.) `https://github.com/Z3Prover/z3/`
  - CVC5 (Clark Barrett, Cesare Tinelli et al.) `https://cvc5.github.io/`

Beispiel `queen10-1.smt2` aus SMT-LIB

```
(set-logic QF_IDL) (declare-fun x0 () Int)
(declare-fun x1 () Int) (declare-fun x2 () Int)
(declare-fun x3 () Int) (declare-fun x4 () Int)
(assert (let ((?v_0 (- x0 x4)) (?v_1 (- x1 x4))
(?v_2 (- x2 x4)) (?v_3 (- x3 x4)) (?v_4 (- x0 x1))
(?v_5 (- x0 x2)) (?v_6 (- x0 x3)) (?v_7 (- x1 x2))
(?v_8 (- x1 x3)) (?v_9 (- x2 x3))) (and (<= ?v_0 3)
(>= ?v_0 0) (<= ?v_1 3) (>= ?v_1 0) (<= ?v_2 3) (>=
?v_2 0) (<= ?v_3 3) (>= ?v_3 0) (not (= x0 x1))
(not (= x0 x2)) (not (= x0 x3)) (not (= x1 x2))
(not (= x1 x3)) (not (= x2 x3)) (not (= ?v_4 1))
(not (= ?v_4 (- 1))) (not (= ?v_5 2)) (not (= ?v_5
(- 2))) (not (= ?v_6 3)) (not (= ?v_6 (- 3))) (not
(= ?v_7 1)) (not (= ?v_7 (- 1))) (not (= ?v_8 2))
(not (= ?v_8 (- 2))) (not (= ?v_9 1)) (not (= ?v_9
(- 1)))))) (check-sat) (exit)
```


Umfang der Benchmarks (2014)

```
http://www.cs.nyu.edu/~barrett/smtlib/?C=S;O=D
QF_BV_DisjunctiveScheduling.zip            2.7G
QF_IDL_DisjunctiveScheduling.zip           2.4G
incremental_Hierarchy.zip                  2.1G
QF_BV_except_DisjunctiveScheduling.zip     1.6G
QF_IDL_except_DisjunctiveScheduling.zip    417M
QF_LIA_Hierarchy.zip                       294M
QF_UFLRA_Hierarchy.zip                     217M
QF_NRA_Hierarchy.zip                       170M
QF_LRA_Hierarchy.zip                       160M
```

- QF: quantifier free,
- I: integer, R: real, BV: bitvector
- D: difference, L: linear, N: polynomial

Anwendung zur Terminations-Analyse

- der *arktische* Halbring: $\mathbb{A} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{N}, \max, +, -\infty, 0)$
- $\mathbb{A}^{d \times d}$: quadratische Matizen über $\mathbb{A}$,
- $P > Q$ falls $\forall i, j : P_{i,j} > Q_{i,j} \vee P_{i,j} = -\infty = Q_{i,j}$.
- Matrix-Interpretation: $i : \Sigma \to \mathbb{A}^{d \times d}$ mit $\forall c : i(c)_{1,1} \geq 0$

  Interpretation von Wörtern: $i(c_1 \ldots c_n) := i(c_1) \circ \ldots \circ i(c_n)$
- i kompatibel mit R, falls $\forall (l, r) \in R : i(l) > i(r)$.
- dann terminiert R, denn jede R-Ableitung von w aus hat $\leq i(w)_{1,1}$ Schritte
- für gegebenes R und d: Kompatibilitä von i ist Constraint-System in `QF_LIA`.

e-DSLs für Constraint-Prog.

- die Constraint-Sprache C dient zur Kommunikation mit Solver (nicht: mit Anwender/Anwendungsprogrammierer)
- Programm in einer Gastsprache G für
  - Konstruktion des Constraint-Systems
  - Verarbeitung des Resultates (des Modells)
- dabei müssen übersetzt werden
  - Namen in C, Namen in G
  - Werte in C (symbolisch), Werte in G (tatsächlich)
  - Typen in C (Bsp: `Bit`), in G (Bsp:`Bool`)
- Entwurfs-Ziele:
  - symbolisches Programm (in C) sieht aus wie tatsächliches Programm (in G)
  - notwendige Übersetzungen möglichst unsichtbar

Wiederholung: ersatz als e-DSL für SAT

-
```
(let b = True in solveWith minisat $ do
   p <- exists @Bit; assert (p === encode b)
   return p
) >>= \ case (Satisfied, Just (p :: Bool))
```
-
```
class Codec c where
   type Decoded c
   encode :: Decoded c -> c
   decode :: Belegung -> c -> Decoded c
instance Codec Bit where
   type Decoded Bit = Bool; ...
```
- Ü: überprüfen Sie die Design-Ziele, geben Sie die technischen Mittel an, durch die diese erreicht werden

Beispiel: Python-Bindung für Z3

- `https://github.com/Z3Prover/z3/blob/master/examples/python/hamiltonian/hamiltonian.py`

```
L = {0:[1,2], 1:[2], 2:[1,0]} # Beispiel-Graph
cv = [Int('cv%s'%i) for i in range(L)]
s = Solver() ; s.add(cv[0]==0)
for i in range(L):
  s.add(Or([cv[j]==(cv[i]+1)%L for j in gr[i]]))
s.check(); print (s.model())
```

- Design-Ziele überprüfen:
  - Namen, Typen, Ausdrücke, Übersetzungen, Sichtbarkeit
- beachte: hier wird keine SMTLIB-Datei erzeugt, sondern API des Solvers aufgerufen.

Haskell-Bindungen für SMTLIB (Bsp. 1)

- Iavor S. Diatchki:
  `https://hackage.haskell.org/package/simple-smt`

```
s <- newSolver "cvc4" ["--lang=smt2"] Nothing
setLogic s "QF_LIA"
x <- declare s "x" tInt
assert s (add x (int 2) `eq` int 5)
check s
print =<< getExprs s [x]
```

- C-Namen sind sichtbar
- C-Typen (`tInt`) erscheinen nicht statisch in G-Typen
- C- und G-Operatoren: add, +
- explizite Rück-Übersetzung (getExprs)

Haskell-Bindungen für SMTLIB (Bsp. 2)

- Henning Günther: `https://hackage.haskell.org/package/smtlib2`

```
withBackend (createPipe "z3" ["-smt2","-in"]) $ do
 x <- declareVar int; y <- declareVar int
 assert $ x .+. y .==. cint 5
 assert $ x .>. cint 0; assert $ y .>. cint 0
 checkSat
 IntValue vx <- getValue x; IntValue vy <- getValue
 return (vx,vy)
```

- C-Typen erscheinen statisch in G-Typen, Bsp:

```
(.>.) :: (Embed m e, IsSMTNumber tp, HasMonad a, Ha
  , MatchMonad a m, MatchMonad b m
  , MonadResult a ~ e tp, MonadResult b ~ e tp)
  => a -> b -> m (e BoolType)
```


Aufgaben

1. Bestimmen Sie:
   - die kleinste natürliche Zahl, die sich auf zwei verschiedene Weisen als Summe von zwei Kuben schreiben läßt

   mit einem SMT-Solver. Schreiben Sie das Constraint-System von Hand. Benutzen Sie Logiken `QF_NIA` (Polynom-Arithmetik) (Warum nicht `QF_LRA`?)

   Hinweis: die Bedingung *die kleinste* kann man nicht hinschreiben, aber durch systematisches Probieren realisieren

   Lösen Sie nun die gleiche Aufgabe mit `QF_BV` (Bitvektoren)

2. Dieses Beispiel in `QF_NIA` ist wohl zu schwer für heutige Solver:

   Andrew R. Booker, Andrew V. Sutherland: *On a question of Mordell*, `https://arxiv.org/abs/2007.01209`

   John Pavlus: *Sum-of-Three-Cubes Problem Solved for 'Stubborn' Number 33*, `https://www.quantamagazine.org/sum-of-three-cubes-problem-solved-for-stubb`
3. wählen Sie zufällig in SMTLIB eine (quantorenfreie) Logik und dort eine Benchmark. Erklären Sie die Benchmark. Wenden Sie verschiedene SMT-Solver an (z.B. Z3 und Z3++) und vergleichen Sie Laufzeiten. Ändern Sie die Formel (vorsichtig), erläutern Sie die Änderungen der

   Belegung oder Erfüllbarkeit.
4. die zitierte Hamiltonkreis-Kodierung (oder die früher zitierte MIP-Kodierung dafür) in SMTLIB-Syntax hinschreiben (in möglichst einfacher Logik) und ausprobieren.
5. Eine kompatible arktische Matrix-Interpretation bestimmen für $a^2b^2 \to b^3a^3$.

   Warum gibt es keine solche Interpretation für $ab \to ba$? Hinweis: weil diese Regel quadratische lange Ableitungen gestattet (geben Sie welche an), aber solche können bei arktischen Interpretationen nicht vorkommen (warum?)

Uninterpretierte Funktionen (UF)

Motivation, Definition

Interpretation $\models$ Formel,
Interpretation $=$ (Struktur, Belegung)
Die *Theorie* $\mathrm{Th}(S)$ einer Struktur S ist Menge aller in S wahren Formeln: $\mathrm{Th}(S) = \{F \mid \forall b : (S, b) \models F\}$
Beispiel 1: Formel $a \cdot b = b \cdot a$ gehört zur $\mathrm{Th}(\mathbb{N}$ mit Multipl.$)$, aber nicht zu $\mathrm{Th}($Matrizen über $\mathbb{N}$ mit Multipl.$)$.
Beispiel 2: Formel

$$(x = y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y))$$

gehört zu *jeder* Theorie (mit passender Signatur),

Gleichheit von Termen

In jeder Algebra gelten diese Formeln:

$$(t_1 = s_1) \wedge \ldots \wedge (t_k = s_k) \to f(t_1, \ldots, t_k) = f(s_1, \ldots, s_k)$$

(Leibniz-Axiom für die Gleichheit, *functional consistency*)

- Definition: eine Σ-Algebra A heißt *frei*, wenn die Implikation im Leibniz-Axiom eine Äquivalenz ist
- Beispiel: jede Termalgebra ist frei.
- Nicht-Beispiel: $\Sigma = \{+/2\}, D = \mathbb{N}$ ist nicht frei.
- Bsp.: eine freie Algebra auf $\mathbb{N}$ zur Signatur $\{f/2\}$ ist $f(x, y) = 2^x \cdot 3^y$ (Satz von Euklid: jede positive natürliche Zahl besitzt *genau eine* Zerlegung in Primzahlpotenzen)

Anwendungen

Für jede Σ-Algebra S gilt:

- Formel F ist allgemeingültig in der *freien* Σ-Algebra
- $\Rightarrow$ Formel F ist allgemeingültig in S.

Vorteil: kein Entscheidungsverfahren für S nötig
Nachteil: Umkehrung gilt nicht.

Anwendung bei Analyse von Programmen, Schaltkreisen: Unterprogramme (Teilschaltungen) als *black box*,

Roope Kaivola et al.: *Replacing Testing with Formal Verification in Intel CoreTM i7 Processor Execution Engine Validation*, Conf. Computer Aided Verification 2009, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02658-4_32`

Die Logik QF_UF in SMT-LIB

- Bsp: die Formel $(x = y) \wedge (f(f(g(x))) \neq f(f(g(y))))$

```
(set-logic QF_UF) (declare-sort U 0)
(declare-fun f (U) U) (declare-fun g (U) U)
(declare-fun x () U) (declare-fun y () U)
(assert (and (= x y)
          (not (= (f (f (g x))) (f (f (g y)
(check-sat)
```

  ist nicht erfüllbar,
- d. h., das Gegenteil ist allgemeingültig:

$$\forall f, g, x, y : ((x = y) \rightarrow (f(f(g(x))) = f(f(g(y))))$$

Ackermann-Transformation

- ... von Formel F in `QF_UF` nach Formel F' in *equalitiy logic* (= `QF_UF` mit nur nullstelligen Symbolen)
  - ersetze jeden vorkommenden Teilterm F_i durch ein neues nullstelliges Symbol f_i
  - füge *functional consistency constraints* hinzu: für alle $F_i = g(F_{i1}, \ldots, F_{ik}), F_j = g(F_{j1}, \ldots, F_{jk})$ mit $i \neq j$: $(f_{i1} = f_{j1} \wedge \ldots \wedge f_{ik} = f_{jk}) \rightarrow f_i = f_j$
- Bsp: $\overbrace{g(\underbrace{h(x)}_{f_1})}^{f_2} = h(\overbrace{g(\underbrace{g(y)}_{f_3})}^{f_4})$ übers. in $(x = f_4 \rightarrow f_2 = f_5)$ $\wedge (f_1 = y \rightarrow f_2 = f_3) \wedge (f_1 = f_3 \rightarrow f_2 = f_4) \wedge (f_2 = f_5)$
- Satz: F erfüllbar $\iff$ F' erfüllbar.

DPLL(T) (Modulo Theories)

DPLL(T), Prinzip

für jedes T.Atom $A = P(t_1, \ldots, t_k)$
eine boolesche Unbek. $p_A \leftrightarrow A$.

- naives Vorgehen:
  - für jede Lösung des SAT-Problem für diese Variablen p_*:
  - bestimme Erfüllbarkeit dieser Konjunkt. von T-Literalen
- Realisierung mit DPLL(T):
  - decide, T-solve (Konjunktion von T-Literalen)
  - Konflikte (logische und T-Konfl.): backtrack
  - logische Propagationen, Lernen
  - T-Propagation (T-Deduktion)

Theorie-Solver für Gleichheitslogik

- entscheidet Erfüllbarkeit von Konjunktion von T-Literalen,

  Bsp: $(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge (y = z)$
- ein Entscheidungsverfahren ist:
  - bestimme die transitive und symmetrische Hülle $=^*$ der Gleichungen. Bsp: $x =^* z$
  - Formel ist erfüllbar $\iff$ es gibt keine Ungleichung $l \neq r$ mit $l =^* r$.

DPLL(T), Beispiel QF_LRA

- T-Solver für Konjunktion von Literalen

  z. B. Simplex, Fourier-Motzkin
- T-Konfliktanalyse:

  bei Nichterfüllbarkeit liefert T-Solver eine „Begründung“

  $=$ (kleine) nicht erfüllbare Teilmenge (von Literalen $\{a_1, \ldots, a_k\}$), dann Klausel $\neg a_1 \vee \ldots \vee \neg a_k$ lernen
- T-Deduktion, Bsp: aus $x \leq y \wedge y \leq z$ folgt $x \leq z$

  neues (!) Atom $x \leq z$ entsteht durch Umformungen während Simplex oder Fourier-Motzkin

  betrachte $\neg x \leq y \vee \neg y \leq z \vee x \leq z$ als Konfliktklausel, damit CDCL

DPLL(T): Einzelheiten, Beispiele

- Literatur: Robert Niewenhuis et al.: `https://www.cs.upc.edu/~roberto/papers/IJCAR2012Slides.pdf`
- Univ. Barcelona, Spin-Off: Barcelogic, Bsp:

  `https://barcelogic.com/en/sports-planning/`

  ... software for professional sports scheduling. It has been successfully applied during the last five years in the Dutch professional football (the main KNVB Ere- and Eerste Divisies).

  An adequate schedule is not only important for sportive and economical fairness among teams and for public order. It also plays a very important role reducing costs and increasing revenues, e.g., the value of TV rights.

Aufgaben

1. freie Algebra:
   - weitere freie Algebren zu $\Sigma = \{f/2\}$ über $\mathbb{N}$.
   - die von $F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$; $G(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$; $I() = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Algebra ist frei?
2. `QF_UF`:

   (a) warum ist diese Formel nicht erfüllbar? `https://clc-gitlab.cs.uiowa.edu:2443/SMT-LIB-benchmarks/QF_UF/-/blob/master/TypeSafe/z3.1184163.smt2`

   (b) Benchmarks `https://clc-gitlab.cs.uiowa.edu:2443/SMT-LIB-benchmarks/QF_UF/-/tree/master/eq_diamond` ausprobieren, angegebene Quelle (SMT 2005) lesen

   (c) über alle Benchmarks `https://clc-gitlab.cs.uiowa.edu:2443/SMT-LIB-benchmarks/QF_UF/-/tree/master/` welches ist die schwerste (für Z3, für CVC5)?

   (d) Für *quantifiers in the UF theory* `https://smt-comp.github.io/2021/system-descriptions/Yices2.pdf`: Beschreibung und Beispiele suchen, Yices installlieren, Beispiele ausprobieren
3. inkrementeller Theorie-Solver:

   (a) für `QF_IDL` (Niewenhuis JACM 2006 `https://www.cs.upc.edu/~roberto/papers.html`), Unterschiede zu nicht inkrementellem Verfahren.

   (b) für `QF_LRA`: wie kann man Fourier-Motzkin inkrementell verwenden? (Der Anwendungsfall ist: es taucht eine neue Ungleichung auf, in der Variablen vorkommen, die durch Fourier-Motzkin bereits eliminiert wurden)

4. DPLL(T) in autotool-Aufgabe
5. Diskussion zu Projekten

Bitblasting

Motivation: SMT über Bitvektoren

SMT-Logik `QF_BV` motiviert durch (Rechner-)Schaltkreis- und (Maschinen-)Programmverifikation

Constraint-Bereich: Bit-Vektoren mit statisch bekannter Breite w

- plus, minus, mal (*modulo* 2^w), min, max, …
- Vergleiche, (parallele) boolesche Verknüpfungen

```
(declare-fun a () (_ BitVec 12))
(declare-fun b () (_ BitVec 12))
(assert (and (bvult (_ bv1 12) a)
             (bvult (_ bv1 12) b)
             (= (_ bv1001 12) (bvmul a b))))
```


Lazy und Eager Approach für QFBV

- Hintegrund-Theorie $= T =$ CNF-SAT:
  - unbekannter Bitvektor = Folge unbekannter Bits
  - atomares Constraint = aussagenlogische Formel (z.B. Formel für Addier- o. Multiplizierschaltkreis)
- weitere spezifische Eigenschaften, z.B. Assoziativität, Kommutativität von Addition, Multiplikation
- DPLL(T): *lazy*
  T-Solver wird „bei Bedarf“ aufgerufen (mehrfach)
- bit-blasting: *eager*
  die Aufgabe wird komplett in die Theorie übersetzt und dann komplett durch den SAT-Solver gelöst
  - Nachteil: das ignoriert spezifische Eigenschaften
  - Vorteil: man braucht nur Übersetzer und SAT-Solver

Bit-Blasting für FD-Constraints

(Wertebereich jeder Unbekannten ist endlich, FD = Finite Domain) Ansatz:

- FD: Unbekannte u mit Bereich $\{0, 1, \ldots, n-1\}$
- $\Rightarrow$ unbekannter Bitvektor $b = [b_0, \ldots, b_{w-1}]$ mit Constraints

Realisierungen:

- *binär*: b ist Binärdarstellung von u, $\quad (w = \lceil \log_2 n \rceil)$
  Constraint: $b < n$
- *unär* $(w = n)$
  - one-hot encoding: $\forall i : b_i \iff (i = u)$
    Constraint: Exactly$_1(b)$
  - order encoding (Treppen-Kodierung) $\forall i : b_i \iff (i \le u)$
    Constraint: ?

Bit-Blasting für unendliche Bereiche?

- z.B. als Lösungsverfahren für `QF_LRA, QF_NIA`

  …das geht im allgemeinen nicht, aber eventuell folgt aus den Constraints, daß es genügt, endliche Wertebereiche zu betrachten.
- auch wenn es (zunächst) nicht folgt—man kann es trotzdem probieren! z.B. für $P \in$ `QF_NIA` nacheinander probieren, ob es Lösungen mit Bit-Breite 1, 2, … gibt.

  Wenn man eine Lösung findet, hat man Glück gehabt.

  Man kann aber Pech haben (P ist lösbar, aber nicht mit kleinen Zahlen)

Anwendung: Graceful Labeling

- Für ungerichteten Graph $G = (V, E)$:

  eine Abbildung $f : V \to \{0 \ldots |E|\}$ heißt *graceful*,

  wenn f injektiv und $\{|f(p) - f(q)| : pq \in E\} = \{1 \ldots |E|\}$.
- Bsp: eine solche Abb. für $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet$
- Vermutung von Ringel, Kotzig, Rosa (1963): jeder Baum besitzt ein graceful labeling.
- für jedes G: Existenz eines graceful labeling für G ist FD-Constraint. Wir betrachten Lösung durch Bit-Blasting.

  zu modellieren sind: Subtraktion (Addition) und (Un)gleichheit

one-hot-Kodierung

- SAT-Kodierung von Exactly$_1$ ist entscheidend und deswegen ausführlich untersucht,
  Übersicht in: Hölldobler, Van Hau Nguyen:
  `http://www.wv.inf.tu-dresden.de/Publications/2013/report-13-04.pdf`,
  vgl. `https://github.com/Z3Prover/z3/issues/755`
- Funktion, Relation $\Rightarrow$ Wertetabelle, Beispiel:
  $f(a, b) = c$ wird zu $\bigwedge_{i,j}(a_i \wedge b_j) \Rightarrow c_{f(i,j)}$
- Ü: Relation $<$ (kleiner als)?
- Ü: partielle Funktion? z.B. Addition auf $\{0, \ldots, n-1\}$
- (partielle) Funktion $D^k \to W$ benötigt $|D|^k$ Klauseln
  nur für kleine Bereiche, geringe Stelligkeiten praktikabel

One-Hot-Kodierung mit Ersatz

- Datentyp: `data OH = OH [Bit]`
- eine Unbekannte (mit Bereich $\{0, \ldots, w\}$) anlegen:

```
make w = do
  bs <- replicateM (w+1) $ exists @Bit
  assert $ Ersatz.Counting.exactly 1 bs
  return $ OH bs
```

- Beziehung zwischen symbolischen und konkreten Daten:

```
instance Codec OH where
  type Decoded OH = Natural
  decode s (OH bs) = do vs <- decode s bs
    return $ genericLength $ takeWhile not vs
```

One-Hot-Arithmetik (variable Bitbreite)

```
instance Equatable OH where
  OH xs === OH ys =
    let common = min (length xs) (length ys)
    in  take common xs === take common ys
```

- variable Bitbreite:

```
instance Num OH where
  OH xs + OH ys = OH $
    flip map [0 .. length xs + length ys] $ \ s ->
      or $ do -- nicht effizient!
        (i,x) <- zip [0..] xs
        (j,y) <- zip [0..] ys
        guard $ i + j == s
        return $ x && y
```


Feste (statische) Bitbreite: Zahlen auf Typ-Ebene

```
{-# language DataKinds #-} import GHC.TypeLits
data OH (w :: Nat) = OH [Bit]  -- Bitbreite im Typ
```

- Allokation in Ersatz (allgemein)

```
class Variable t where
  literally :: MonadSAT s m => m Literal -> m t
exists :: (Variable a, MonadSAT s m) => m a
```

- Allokation für `OH w`, dabei Typ-Zahl ⇒ Daten-Zahl

```
instance KnownNat w => Variable (OH w) where
  literally l =
    .. replicateM (natVal (Proxy @w)) l ..
```

danach kann man schreiben `exists @(OH 3)`

Reflektion von Zahlen als Typ-Zahlen

- bisher: Zahlen im Typ, Umwandlung zu Daten-Zahlen.

  wir brauchen: die andere Richtung. Bsp: Zahl (Bitbreite) wird im Programm geändert oder ist Benutzer-Eingabe.
- Lösung: Paket `reflection`, enthält Funktion

```
import Data.Reflection
reifyNat :: Integer
 ->(forall (n::Nat).KnownNat n => Proxy n -> r)->r
```

`n` ist *lokal quantifiziert*, kann nicht in `r` verwendet werden

- Anw.: Typvar. `n` deklariert und mit Wert von `x` belegt

```
reifyNat (x :: Integer) $ \ (_ :: Proxy n) ->
  do ..  exists @(OH n) ..
```


Aufgaben

1. Überprüfen Sie *generalized arc-consistency* (forcing) für `sym_diff_eq a b c` (Semantik: $|a - b| = c$) für One-Hot-Kodierung.

   Bsp.: Bitbreite 4 (für Bereich $\{0, 1, 2, 3\}$), partielle Belegung $a_0 = 0, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 0$. Welche c_i sind dadurch (semantisch) bestimmt? Erhält man diese durch Unit-Propagation? (nehmen Sie dabei an, daß die verwendete Kodierung von exactly-one forcierend ist).
2. zu D. E. Knuth: TAOCP Fasc. 7A (Version 18. Nov. 2022), S. 16 ff: *Graph labeling*

   Diskutieren/realisieren Sie Bitblasting (SAT-Kodierung) für das *reverse model* (S. 19)

Bitblasting für Arithmetik

Treppen-Kodierung (order encoding)

- Definition: $\forall i : b_i \iff (i \le u)$

  Bsp: $u = 2$ kodiert durch $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$
- Constraints: $\forall i : b_i \Leftarrow b_{i+1}$ (Monotonie)
- Ü: einfache (lineare) Kodierung von $\le$

  das erfordert nur linear große Formel

  Ü: ist das trotzdem forcierend?
- vergleiche: $\le$ ist quadratisch für One-Hot.

  Ü: lineare Übersetzung f von One-Hot nach Treppe, dann $f(x) \le f(y)$ insgesamt linear für One-Hot x, y.

Addition für Treppenkodierung

- (für variable Bitbreite) Addition *genau* wie für one-hot:

```
OH xs + OH ys = OH $
  flip map [0 .. length xs + length ys] $ \ s ->
    or $ do -- nicht effizient! (kubische Zeit)
      (i,x) <- zip [0..] xs
      (j,y) <- zip [0..] ys
      guard $ i + j == s  -- NICHT geändert!
      return $ x && y
```

Formelgröße: quadratisch. Ü: ist forcierend?

- effizientere Kodierung ($O(n \log n)$) der Addition über Merge-Netze: Een, Sorenson: *Translating Pseudo-Boolean Constraints into SAT*, 2007.

  `http://minisat.se/downloads/MiniSat+.pdf`

Binär-Kodierung, Addition

- in Ersatz: `data Bits = Bits [Bit]`, beginnt mit LSB!
- Ordnung (Ü: fehlende Fälle in eq, Ü: `Orderable`)

```
instance Equatable Bits where
  Bits xs === Bits ys = eq xs ys where
    eq [] [] = true
    eq (x:xs) (y:ys) = (x === y) && eq xs ys
```

- Addition (Ü: fehlende Fälle in add) Formelgröße linear

```
instance Num Bits where
  Bits xs + Bits ys = Bits $ add false xs ys where
    add cin (x:xs) (y:ys) =
      let (s,cout) = fullAdder cin x y
      in  s : add cout xs ys
```


Binäre Multiplikation

$[x_0, \ldots]_2 \cdot [y_0, \ldots]_2 = [z_0, \ldots]_2$,

- Schulmethode: $z = \sum 2^i \cdot x_i \cdot y$ (sequentielle Summation)
- Verbesserungen: C.S. Wallace (1964), L. Dadda (1965),

  benutze *full-adder* für *verschränkte* Summation,

  (ähnlich zu carry-save-adder)

  verringert Anzahl der Gatter und Tiefe des Schaltkreises

  vgl. Townsend et al.:*A Comparison of...*, 2003 `http://www.cerc.utexas.edu/~whitney/pdfs/spie03.pdf`,
- scheint für CNF-Kodierung wenig zu helfen

  Testfall: Faktorisierung.

Arithmetik für (statisch) fixierte Bitbreite

- `data Bin (w::Nat) = Bin [Bit]`
  Gibt es `instance Num (Bin 3)`? Nein: $5+7 \notin$ `Bin 3`
- relationale Kodierung (Summe raten und überprüfen mit `plus_ok :: Bin w -> Bin w -> Bin w -> Bit`)
- funktionale Kodierung mit Überlauf

```
data Bin (w::Nat)
  = Bin { contents::[Bit], overflow::Bit }
```

  – Überlauf richtig erzeugen (für Addition trivial, Ü: Multiplikation)
  – Überlauf propagieren (aus den Argumenten für plus bzw. mal)
  – Überlauf bei Implementierung von `===`, `<?` beachten

Aufgaben

1. sind angegeben Implementierungen der binären Arithmetik und Vergleichsrel. fixierter Breite forcierend?
2. Binärzahlen (statt one-hot) für Graceful labeling.
3. Kodierung von vorzeichenbehafteten Zahlen
   (a) feste Bitbreite: im Zweierkomplement
   (b) variable Bitbreite: zur Basis -2, Bsp.
   $-5 = 1-2+4-8 = 1\cdot(-2)^0+1\cdot(-2)^1+1\cdot(-2)^3+1\cdot(-2)^3$
   Instanzen für Ersatz (Codec, Equatable, Orderable, Num)
4. Diskutieren Sie richtige Propagation von Überläufen bei Kodierung von Zahlen aus $\{-B, \dots, B\}$ für Operationen plus, mal, kleiner, gleich.

5. weitere Beispiele und Aufgaben zu Bitblasting-Arithmetik: `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/22/isr/#solving-qf_nia-by-bit-blasting` (ISR 2022)
6. Realisieren Sie die Berechnung des Überlaufs bei
   (a) Addition
   (b) Multiplikation

   in `QF_BV` durch möglichst kleine Formel.

   Damit können Sie ein Constraint P in `QF_NIA`, `QF_LIA` in Constraints P_w in `QF_BV` (mit Bitbreite w) übersetzen, und evtl. Glück haben, wie in VL beschrieben.

   Probieren Sie für einfache (handgeschriebene) Constraints P aus, ob (z.B. Z3) für P oder $P_1, P_2, \dots$ schneller ist.

Paralleles SAT-Lösen

Paralleles SAT-Lösen (Grundlagen)

- Youssef Hamadi, Christoph M. Wintersteiger: *Seven Challenges in Parallel SAT Solving*, AAAI 2012, `https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/seven-challenges-in-parallel-sat-solving/`
  – (Portfolio) unabhängige Solver
  – Austausch von (kleinen! - M. Soos) gelernten Klauseln
  – Suche in getrennten Unterräumen ($x_3 = 0$, $x_3 = 1$)
  – (Propagation läßt sich nicht parallelisieren)
- Mate Soos: *Parallel SAT Solving*, 2018 `https://www.msoos.org/tag/parallel-sat-solving/`

Paralleles SAT-Lösen (heute)

- Ludovic Le Frioux, Souheib Baarir, Julien Sopena, Fabrice Kordon: *PaInleSS: a Framework for Parallel SAT Solving*, `https://www.lrde.epita.fr/wiki/Publications/le-frioux.17.sat`
- Proc. SAT Competition 2022, `https://helda.helsinki.fi/handle/10138/347211`
- cube-and-conquer: Maximilian Heisinger: Paracooba,
  tree-based look-ahead, Armin Biere: *treengeling*, `https://github.com/arminbiere/lingeling`
- probabilistic backdoor
- `https://github.com/caiswgroup/ParKissat-RS`

Anw: Schaltkreisverifikation

- Schaltkreise (Formeln) F (Muster-Implementierung) und G (tatsächliche Implementierung) sind äuivalent, wenn $\neg\exists x : F(x) \neq G(x)$
- Beispiel: $F(x)$ naives (quadratisches) atmost-one, $G(x)$ lineares atmost-one
- ähnlich: Kommutativität der Multiplikation von `Ersatz.Bits`: $F(x,y) = x \cdot y$, $G(x,y) = y \cdot x$.
  Quelltexte: `cp-ws22/kw57/equiv`
  verschiedene Solver ausprobieren. Auch für Assoziativität
- Kommutativität ist nicht trivial: Rekursion nach x, nach y.
- Übung: wie schwierig sind Komm./Ass. der Addition? Ausprobieren, diskutieren. Geht das mit Unit-Prop.?

Anwendg.: Bounded Model Checking

Begriff, Motivation

- *model checking*: feststellen, ob
  – ein *Modell* eines realen Hard- oder Softwaresystems (z.B. Zustandsübergangssystem f. nebenläufiges Programm)
  – eine *Spezifikation* erfüllt (z.B. gegenseitiger Ausschluß, Liveness, Fairness)
- *symbolic* model checking:
  symbolische Repräsentation von Zustandsfolgen
  im Unterschied zu tatsächlicher Ausführung (Simulation)
- *bounded*: für Folgen beschränkter Länge

Literatur, Software

- Armin Biere et al.: *Symbolic Model Checking without BDDs*, TACAS 1999, `http://fmv.jku.at/bmc/`
  Software damals: Übersetzung nach SAT, später: SMT (`QB_BV`), Solver: `http://fmv.jku.at/boolector/`
- Daniel Kroening und Ofer Strichman: *Decision Procedures, an algorithmic point of view*, Springer, 2008. `http://www.decision-procedures.org/`
  Software: `http://www.cprover.org/cbmc/`
- Nikolaj Bjørner et al.: *Program Verification as Satisfiability Modulo Theories*, SMT-Workshop 2012, `http://smt2012.loria.fr/`
  Softw.: `https://github.com/Z3Prover/z3/wiki`

BMC für Mutual Exclusion-Protokolle

System mit zwei (gleichartigen) Prozessen A, B:

```
A0: maybe goto A1
A1: if l goto A1 else goto A2
A2: l := 1; goto A3
A3: [critical;] goto A4
A4: l := 0; goto A0

B0: maybe goto B1
B1: if l goto B1 else goto B2
B2: l := 1; goto B3
B3: [critical;] goto B4
B4: l := 0; goto B0
```

Schließen sich `A3` und `B3` gegenseitig aus? (Nein.)

(nach: Donald E. Knuth: TAOCP, Vol. 4 Fasz. 6, S. 20ff)

Modell: Zustandsübergangssystem

Zustände:

- jeder Zustand besteht aus:
  - Inhalte der Speicherstellen (hier: $l \in \{0, 1\}$)
  - Programmzähler (PC) jedes Prozesses (hier: $A \in \{0 \dots 4\}, B \in \{0 \dots 4\}$)
- Initialzustand: $I = \{l = 0, A = 0, B = 0\}$
- Menge der Fehlerzustände: $F = \{A = 3, B = 3\}$

Übergangsrelation (nichtdeterministisch): für $P \in \{A, B\}$:

- P führt eine Aktion aus (schreibt Speicher, ändert PC)

Aussagenlog. Formel für $I \to^{\leq k} F$ angeben,
deren Erfüllbarkeit durch SAT- oder SMT-Solver bestimmen

Übung BMC

- Software: `https://gitlab.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/boumchak`
- überprüfe 1. gegenseitigen Ausschluß, 2. deadlock, 3. livelock (starvation) für weitere Systeme, z.B.

  E. W. Dijkstra, 1965: `https://www.cs.utexas.edu/~EWD/transcriptions/EWD01xx/EWD123.html#2.1.`

  G. L. Peterson, *Myths About the Mutual Exclusion Problem*, Information Processing Letters 12(3) 1981, 115–116

Zusammenfassung, Ausblick

Kernaussagen

- Constraint-Programmierung =
  - anwendungsspezifische logische Formel,
  - generische bereichsspezifische Such/Lösungsverfahren
- CP ist eine Form der deklarativen Programmierung
- typische Anwendungsfälle für CP mit Formeln ohne Quantoren, mit freien Variablen, Solver sagt:
  - JA: beweist Existenz-Aussage, rekonstruiere Lösung der Anwendungsaufgabe aus Modell
  - NEIN: das beweist All-Aussage (z. B. Implementierung erfüllt Spezifikation für jede Eingabe)

Kernthemen

Aussagenlogik (SAT)

- Grundlagen: Formeln, Resolution, DPLL, CDCL
- Anw.: SAT-Kod. für kombinatorische Aufgaben, Forcing,

Prädikatenlogik: Bereiche und -spezifische Verfahren:

- Zahlen: Differenzlogik, lineare Ungleichungen (Fourier-Motzkin),
- uninterpretierte Funktionen,

Prädikatenlogik: allgemeine und spezielle Verfahren:

- Kombination von Theorie-Löser und SAT-Löser (DPLL(T))
- Bit-Blasting für finite-domain-Constraints

Typische Anwendungen

- Ressourcen-Zuordungs-, -Optimierungs-Aufgaben mit
  - nicht linearen Funktionen
  - nicht nur konjuktiver Verknüpfung von Teilbedingungen
- Hardware-Verifikation: digitale Schaltnetze, Schaltwerke
- Software-Verifikation:
  - bounded model checking,
  - Terminations-Analyse, siehe *Constraint Programming for Analysis of Rewriting*, 13th Intl. School on Rewriting, Tbilisi, 2022, `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/22/isr/`

Geschichte der Constraint-Progr. (I)

- Lineare Optimierung (Dantzig 1947 et al.)

  ⇒ Mixed Integer LP (Gomory 195* et al.)
  `https://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/builders/builders_gomory.html`
- PROLOG (Kowalski 1974)
  - löst Unifikations-Constraints über Bäumen
  - mit fixierter Suchstrategie (SLD-Resolution)

  ⇒ Constraint Logic Programming (spezielle Syntax und Strategien für Arithmetik, endliche Bereiche)

  Global constraints in CHIP: Beldiceanu, Contejean 1994
  `http://dx.doi.org/10.1016/0895-7177(94)90127-9`

Geschichte der Constraint-Progr. (II)

- fixierte, bekannte Suchstrategie: PROLOG
- Strategie innerhalb des CP bestimmt: gecode
- (praktisch unbekannte) Strategie im externen Solver:
  - SAT
    - DPLL: Martin Davis, Hilary Putnam (1960), George Logemann, Donald W. Loveland (1962),
    - SAT ist NP-vollst. (Steven Cook, Leonid Levin, 1971)
    - CDCL: J.P Marques-Silva, Karem A. Sakallah (1996)
  - SMT
    - DPLL(T): the *lazy* approach to SMT
    - Yices 2006,
    - Z3 (de Moura, Bjorner, 2008)

Constraints für (baum)strukturierte Daten

- Sprache CO4, Dissertation von A. Bau `http://abau.org/co4.html`
- Constraint `c :: P -> U -> Bool` *in Haskell*
- ... das geht in `ersatz` auch?

  Ja — aber nur für $U =$ `Bool`, `[Bool]`, usw., und auch dafür nicht vollständig:

  `if a == b then c else d && e`

  $\Rightarrow$ `ite (a === b) c (d && e)`
- CO4 gestattet für P *und* U:
  - algebraische Datentypen (`data`)
  - pattern matching (`case`)

SAT-Kodierung von Bäumen

- kodiere (endl. Teilmengen von) algebraischen Datentypen

  `data U = C1 T11 .. T1i | C2 T21 .. T2j | ..`
- durch Baum mit Grad $\max(i, j, \ldots)$,

  in jedem Knoten die FD-Kodierung des Konstruktor-Index
- ```
  e = case (x :: U) of
          C1 .. -> e1 ; C2 .. -> e2
  ```

  übersetzt in $\bigwedge_k(\text{index}(x) = k) \Rightarrow (e = e_k)$

Spezifikation, Implementierung, Korrektheit,
Anwendungsfälle (Terminations-Analyse, RNA-Design),
Messungen, Verbesserungen, Erweiterungen.
siehe Publikationen auf `http://abau.org/co4.html`

Themen für Bachelor/Master-Arbeiten

- Dokumentation, Messung und Verbesserung von ersatz:
  - Relationen (Thema ist schon in Arbeit)
  - Zahlen mit type-level Länge und Überlauf
  - Anzahl-Constraints
- Verbesserung/Alternativen Bitblasting in Termination: aktuelle parallele SAT-Solver, SMT-Solver (QFBV)
- Methoden zur Analyse von SAT-Kodierungen
  - automat. Prüfen (Herstellen?) d. Forcing-Eigenschaft
  - Rückübertragung von Laufzeitinformation (wer wird eliminiert/propagiert) auf Quelltext-Ebene
- Vergleich von propositionaler und funktionaler Kodierung bei klassischen (publizierten) Testfällen
  ```