Compilerbau Vorlesung Wintersemester 2008–11,13,15

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

10. Oktober 2017

1 Einleitung

Beispiel

Eingabe (≈ Java):

```
{ int i;
  float prod;
  float [20] a;
  float [20] b;
  prod = 0;
  i = 1;
  do {
    prod = prod
      + a[i]*b[i];
    i = i+1;
  } while (i <= 20);
}
```

Ausgabe (Drei-Adress-Code):

```
L1: prod = 0
L3: i = 1
L4: t1 = i * 8
    t2 = a [ t1 ]
    t3 = i * 8
    t4 = b [ t3 ]
    t5 = t2 * t4
    prod = prod + t5
L6: i = i + 1
L5: if i <= 20 goto L4
L2:
```

Sprachverarbeitung

- mit Compiler:
  - Quellprogramm → Compiler → Zielprogramm
  - Eingaben → Zielprogramm → Ausgaben

- mit Interpreter:
  - Quellprogramm, Eingaben → Interpreter → Ausgaben
- Mischform:
  - Quellprogramm → Compiler → Zwischenprogramm
  - Zwischenprogramm, Eingaben → virtuelle Maschine → Ausgaben

Gemeinsamkeit: syntaxgesteuerte Semantik (Ausführung bzw. Übersetzung)

(weitere) Methoden und Modelle

- lexikalische Analyse: reguläre Ausdrücke, endliche Automaten
- syntaktische Analyse: kontextfreie Grammatiken, Kellerautomaten
- semantische Analyse: Attributgrammatiken
- Code-Erzeugung: bei Registerzuordnung: Graphenfärbung
- Semantik-Definition: Inferenz-Systeme,
- semantische Bereiche als Monaden (Fkt. höherer Ordnung)

Inhalt der Vorlesung

Konzepte von Programmiersprachen

- Semantik von einfachen (arithmetischen) Ausdrücken
- lokale Namen, • Unterprogramme (Lambda-Kalkül)
- Zustandsänderungen (imperative Prog.)
- Continuations zur Ablaufsteuerung

realisieren durch

- Interpretation, • Kompilation

Hilfsmittel:

- Theorie: Inferenzsysteme (f. Auswertung, Typisierung)
- Praxis: Haskell, Monaden (f. Auswertung, Parser)

Literatur

- Franklyn Turbak, David Gifford, Mark Sheldon: *Design Concepts in Programming Languages*, MIT Press, 2008. `http://cs.wellesley.edu/~fturbak/`
- Guy Steele, Gerald Sussman: *Lambda: The Ultimate Imperative*, MIT AI Lab Memo AIM-353, 1976

  (the original 'lambda papers', `http://library.readscheme.org/page1.html`)
- Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi and Jeffrey D. Ullman: *Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd edition)* Addison-Wesley, 2007, `http://dragonbook.stanford.edu/`
- J. Waldmann: *Das M-Wort in der Compilerbauvorlesung*, Workshop der GI-Fachgruppe Prog. Spr. und Rechnerkonzepte, 2013 `http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/13/fg214/`

Anwendungen von Techniken des Compilerbaus

- Implementierung höherer Programmiersprachen
- architekturspezifische Optimierungen (Parallelisierung, Speicherhierarchien)
- Entwurf neuer Architekturen (RISC, spezielle Hardware)
- Programm-Übersetzungen (Binär-Übersetzer, Hardwaresynthese, Datenbankanfragesprachen)
- Software-Werkzeuge (z.B. Refaktorisierer)

Organisation der Vorlesung

- pro Woche eine Vorlesung, eine Übung.
- in Vorlesung, Übung und Hausaufgaben:
  - Theorie,
  - Praxis: Quelltexte (weiter-)schreiben (erst Interpreter, dann Compiler)
- Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten von Übungsaufgaben
- Prüfung: Klausur (120 min, keine Hilfsmittel)

Beispiel: Interpreter (I)

arithmetische Ausdrücke:

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp | Times Exp Exp
    deriving ( Show )
ex1 :: Exp
ex1 = Times ( Plus ( Const 1 ) ( Const 2 ) ) ( Const 3 )
value :: Exp -> Integer
value x = case x of
    Const i -> i
    Plus x y -> value x + value y
    Times x y -> value x * value y
```

Beispiel: Interpreter (II)

lokale Variablen und Umgebungen:

```
data Exp = ...
         | Let String Exp Exp | Ref String
ex2 :: Exp
ex2 = Let "x" ( Const 3 )
     ( Times ( Ref "x" ) (Ref "x" ) )
type Env = ( String -> Integer )
value :: Env -> Exp -> Integer
value env x = case x of
    Ref n -> env n
    Let n x b -> value ( \ m ->
      if n == m then value env x else env m )  b
    Const i -> i
    Plus x y -> value env x + value env y
    Times x y -> value env x * value env y
```

Übung (Haskell)

- Wiederholung Haskell
  - Interpreter/Compiler: ghci `http://haskell.org/`
  - Funktionsaufruf nicht `f(a,b,c+d)`, sondern `f a b (c+d)`
  - Konstruktor beginnt mit Großbuchstabe und ist auch eine Funktion

- Wiederholung funktionale Programmierung/Entwurfsmuster
  - rekursiver algebraischer Datentyp (ein Typ, mehrere Konstruktoren)
    (OO: Kompositum, ein Interface, mehrere Klassen)
  - rekursive Funktion
- Wiederholung Pattern Matching:
  - beginnt mit `case ... of`, dann Zweige
  - jeder Zweig besteht aus Muster und Folge-Ausdruck
  - falls das Muster paßt, werden die Mustervariablen gebunden und der Folge-Ausdruck auswertet

Übung (Interpreter)

- Benutzung:
  - Beispiel für die Verdeckung von Namen bei geschachtelten Let
  - Beispiel dafür, daß der definierte Name während seiner Definition nicht sichtbar ist
- Erweiterung:

  Verzweigungen mit C-ähnlicher Semantik:

  Bedingung ist arithmetischer Ausdruck, verwende 0 als Falsch und alles andere als Wahr.

  ```
  data Exp = ...
           | If Exp Exp Exp
  ```
- Quelltext-Archiv: siehe `https://gitlab.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cb-ws15`

2 Inferenz-Systeme

Motivation

- inferieren = ableiten
- Inferenzsystem I, Objekt O,
  Eigenschaft $I \vdash O$ (in I gibt es eine Ableitung für O)
- damit ist I eine *Spezifikation* einer Menge von Objekten
- man ignoriert die *Implementierung* (= das Finden von Ableitungen)
- Anwendungen im Compilerbau:
  Auswertung von Programmen, Typisierung von Programmen

Definition
ein *Inferenz-System* I besteht aus

- Regeln (besteht aus Prämissen, Konklusion)
  Schreibweise $\frac{P_1,\ldots,P_n}{K}$
- Axiomen (= Regeln ohne Prämissen)

eine *Ableitung* für F bzgl. I ist ein Baum:

- jeder Knoten ist mit einer Formel beschriftet
- jeder Knoten (mit Vorgängern) entspricht Regel von I
- Wurzel (Ziel) ist mit F beschriftet

Def: $I \vdash F :\iff \exists\, I$-Ableitungsbaum mit Wurzel F.

Das Ableiten als Hüll-Operation

- für Inferenzsystem I über Bereich O
  und Menge $M \subseteq O$ definiere
  $M^{\vdash} := \{K \mid \dfrac{P_1,\ldots,P_n}{K} \in I, P_1 \in M, \ldots, P_n \in M\}.$
- Übung: beschreibe $\emptyset^{\vdash}$.

- Satz: $\{F \mid I \vdash F\}$ ist die bzgl. $\subseteq$ kleinste Menge M mit $M^{\vdash} \subseteq M$

  Bemerkung: „die kleinste“: Existenz? Eindeutigkeit?

- Satz: $\{F \mid I \vdash F\} = \bigcup_{i \geq 0} M_i$ mit $M_0 = \emptyset, \forall i : M_{i+1} = M_i^{\vdash}$

Regel-Schemata

- um unendliche Menge zu beschreiben, benötigt man unendliche Regelmengen
- diese möchte man endlich notieren
- ein *Regel-Schema* beschreibt eine (mglw. unendliche) Menge von Regeln, Bsp: $\frac{(x,y)}{(x-y,y)}$
- Schema wird *instantiiert* durch Belegung der Schema-Variablen

  Bsp: Belegung $x \mapsto 13, y \mapsto 5$

  ergibt Regel $\frac{(13,5)}{(8,5)}$

Inferenz-Systeme (Beispiel 1)

- Grundbereich $=$ Zahlenpaare $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- Axiom:

$$\frac{}{(13,5)}$$

- Regel-Schemata:

$$\frac{(x,y)}{(x-y,y)}, \quad \frac{(x,y)}{(x,y-x)}$$

kann man $(1,1)$ ableiten? $(-1,5)$? $(2,4)$?

Inferenz-Systeme (Beispiel 2)

- Grundbereich: Zeichenketten aus $\{0, 1\}^*$
- Axiom:

$$\frac{}{01}$$

- Regel-Schemata (für jedes u, v):

$$\frac{0u, v0}{u1v}, \quad \frac{1u, v1}{u0v}, \quad \frac{u}{\text{reverse}(u)}$$

Leite 11001 ab. Wieviele Wörter der Länge k sind ableitbar?

Inferenz-Systeme (Beispiel 3)

- Grundbereich: endliche Folgen von ganzen Zahlen
- Axiome: jede konstante Folge (Bsp. $[3, 3, 3, 3]$)
- Schlußregeln:
  - swap$_k$: $\dfrac{[\ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots]}{[\ldots, x_{k+1} + 1, x_k - 1, \ldots]}$
  - rotate: $\dfrac{[x_1, \ldots, x_n]}{[x_2, \ldots, x_n, x_1]}$

Aufgaben: • Ableitungen für $[5, 3, 1, 3]$, $[7, 7, 1]$

- jede Folge der Form $[z, 0, \ldots, 0]$ ist ableitbar
- Invarianten, $[5, 3, 3]$ ist nicht ableitbar

praktische Realisierung: `http://www.siteswap.org/` und HTWK-Hochschulsport

Inferenz von Werten

- Grundbereich: Aussagen der Form $\mathsf{wert}(p, z)$ mit $p \in$ `Exp` , $z \in \mathbb{Z}$

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp
         | Times Exp Exp
```

- Axiome: $\mathsf{wert}(\texttt{Const}\, z, z)$
- Regeln:

$$\frac{\mathsf{wert}(X, a), \mathsf{wert}(Y, b)}{\mathsf{wert}(\texttt{Plus}\ X\ Y, a + b)}, \quad \frac{\mathsf{wert}(X, a), \mathsf{wert}(Y, b)}{\mathsf{wert}(\texttt{Times}\ X\ Y, a \cdot b)}, \ldots$$

Umgebungen (Spezifikation)

- Grundbereich: Aussagen der Form $\mathsf{wert}(E, p, z)$

  (in Umgebung E hat Programm p den Wert z)

  Umgebungen konstruiert aus $\emptyset$ und $E[v := b]$

- Regeln für Operatoren $\dfrac{\mathsf{wert}(E, X, a), \mathsf{wert}(E, Y, b)}{\mathsf{wert}(E, \mathtt{Plus} XY, a + b)}, \ldots$

- Regeln für Umgebungen $\dfrac{}{\mathsf{wert}(E[v := b], v, b)}, \quad \dfrac{\mathsf{wert}(E, v', b')}{\mathsf{wert}(E[v := b], v', b')}$ für $v \neq v'$

- Regeln für Bindung: $\dfrac{\mathsf{wert}(E, X, b), \mathsf{wert}(E[v := b], Y, c)}{\mathsf{wert}(E, \mathtt{let}\ v = X\ \mathtt{in}\ Y, c)}$

Umgebungen (Implementierung)

Umgebung ist (partielle) Funktion von Name nach Wert
Realisierungen: `type Env = String -> Integer`
Operationen:

- `empty :: Env` leere Umgebung
- `lookup :: Env -> String -> Integer`

  Notation: $e(x)$

- `extend :: Env -> String -> Integer -> Env`

  Notation: $e[v := z]$

Beispiel

```
lookup (extend (extend empty "x" 3) "y" 4) "x"
```

entspricht $(\emptyset[x := 3][y := 4])x$

Aussagenlogische Resolution

Formel $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee D)$ in konjunktiver Normalform
dargestellt als $\{\{A, \neg B, \neg C\}, \{C, D\}\}$
(Formel = Menge von Klauseln, Klausel = Menge von Literalen, Literal = Variable oder negierte Variable)

folgendes Inferenzsystem heißt *Resolution*:

- Axiome: Klauselmenge einer Formel,
- Regel:
  - Prämissen: Klauseln K_1, K_2 mit $v \in K_1, \neg v \in K_2$
  - Konklusion: $(K_1 \setminus \{v\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg v\})$

Eigenschaft (Korrektheit): wenn $\dfrac{K_1, K_2}{K}$, dann $K_1 \wedge K_2 \to K$.

Resolution (Vollständigkeit)

die Formel (Klauselmenge) ist nicht erfüllbar $\iff$ *die leere Klausel ist durch Resolution ableitbar.*

Bsp: $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$

Beweispläne:

- $\Rightarrow$: Gegeben ist die nicht erfüllbare Formel. Gesucht ist eine Ableitung für die leere Klausel. Methode: Induktion nach Anzahl der in der Formel vorkommenden Variablen.
- $\Leftarrow$: Gegeben ist die Ableitung der leeren Klausel. Zu zeigen ist die Nichterfüllbarkeit der Formel. Methode: Induktion nach Höhe des Ableitungsbaumes.

Die Abtrennungsregel (modus ponens)

…ist das Regelschema $\dfrac{P \to Q, P}{Q}$,

Der *Hilbert-Kalkül* für die Aussagenlogik
ist das Inferenz-System mit modus ponens
und Axiom-Schemata wie z. B.

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

(es gibt verschiedene Varianten des Kalküls) — Man zeigt:

- Korrektheit: jede ableitbare Aussage ist allgemeingültig
- Vollständigkeit: jede allgemeing. Aussage ist ableitbar

Semantische Bereiche

bisher: Wert eines Ausdrucks ist Zahl.
jetzt erweitern (Motivation: if-then-else mit richtigem Typ):

```
data Val = ValInt Int
         | ValBool Bool
```

Dann brauchen wir auch

- `data Val = ... | ValErr String`
- vernünftige Notation (Kombinatoren) zur Einsparung von Fallunterscheidungen bei Verkettung von Rechnungen

  ```
  with_int  :: Val -> (Int  -> Val) -> Val
  ```

Continuations

Programmablauf-Abstraktion durch Continuations:
Definition:

```
with_int  :: Val -> (Int  -> Val) -> Val
with_int v k = case v of
    ValInt i -> k i
    _ -> ValErr "expected ValInt"
```

Benutzung:

```
value env x = case x of
    Plus l r ->
        with_int ( value env l ) $ \ i ->
        with_int ( value env r ) $ \ j ->
        ValInt ( i + j )
```

Aufgaben: if/then/else mit `with_bool`, relationale Operatoren (==, <, o.ä.), Boolesche Konstanten.

3 Unterprogramme

Beispiele

- in verschiedenen Prog.-Sprachen gibt es verschiedene Formen von Unterprogrammen:

  Prozedur, sog. Funktion, Methode, Operator, Delegate, anonymes Unterprogramm

- allgemeinstes Modell: Kalkül der anonymen Funktionen (Lambda-Kalkül),

Interpreter mit Funktionen

abstrakte Syntax:

```
data Exp = ...
  | Abs { formal :: Name , body :: Exp }
  | App { rator  :: Exp  , rand :: Exp }
```

konkrete Syntax:

```
let { f = \ x -> x * x }  in  f (f 3)
```

konkrete Syntax (Alternative):

```
let { f x = x * x }  in  f (f 3)
```

Semantik

erweitere den Bereich der Werte:

```
data Val = ... | ValFun ( Value -> Value )
```

erweitere Interpreter:

```
value :: Env -> Exp -> Val
value env x = case x of
    ...
    Abs { } ->
    App { } ->
```

mit Hilfsfunktion

```
with_fun :: Val -> ...
```

Testfall (1)

```
let { x = 4 }
in  let { f = \ y -> x * y }
    in  let { x = 5 }
        in  f x
```

Let und Lambda

- `let { x = A } in Q`

  kann übersetzt werden in

  `(\ x -> Q) A`

- `let { x = a , y = b } in Q`

  wird übersetzt in ...

- beachte: das ist nicht das `let` aus Haskell

Mehrstellige Funktionen

... simulieren durch einstellige:

- mehrstellige Abstraktion:

  ```
  \ x y z -> B := \x -> (\y -> (\z -> B ))
  ```

- mehrstellige Applikation:

  ```
  f P Q R    :=   ((f P) Q) R
  ```

  (die Applikation ist links-assoziativ)

- der Typ einer mehrstelligen Funktion:

  ```
  T1 -> T2 -> T3 -> T4    :=
     T1 -> (T2 -> (T3 -> T4))
  ```

  (der Typ-Pfeil ist rechts-assoziativ)

Closures (I)

bisher:

```
eval env x = case x of ...
  Abs n b -> ValFun $ \ v ->
    eval (extend env n v) b
  App f a ->
    with_fun ( eval env f ) $ \ g ->
    with_val ( eval env a ) $ \ v -> g v
```

alternativ: die Umgebung von `Abs` in die Zukunft transportieren:

```
eval env x = case x of ...
  Abs n b -> ValClos env n b
  App f a -> ...
```

Closures (II)

Spezifikation der Semantik durch Inferenz-System:

- Closure konstruieren:

$$\frac{}{\mathsf{wert}(E, \lambda n.b, \mathsf{Clos}(E, n, b))}$$

- Closure benutzen:

$$\frac{\mathsf{wert}(E_1, f, \mathsf{Clos}(E_2, n, b)), \mathsf{wert}(E_1, a, w), \quad \mathsf{wert}(E_2[n := w], b, r)}{\mathsf{wert}(E_1, fa, r)}$$

Rekursion?

- Das geht nicht, und soll auch nicht gehen:

```
let { x = 1 + x } in x
```

- aber das hätten wir doch gern:

```
let { f = \ x -> if x > 0
                 then x * f (x -1) else 1
    } in  f 5
```

  (nächste Woche)

- aber auch mit nicht rekursiven Funktionen kann man interessante Programme schreiben:

Testfall (2)

```
let { t f x = f (f x) }
in  let { s x = x + 1 }
    in  t t t t s 0
```

- auf dem Papier den Wert bestimmen
- mit Haskell ausrechnen
- mit selbstgebautem Interpreter ausrechnen

4 Lambda-Kalkül

Motivation

1. intensionale Modellierung von Funktionen,

- intensional: Fkt. ist Berechnungsvorschrift, Programm
- (extensional: Fkt. ist Menge v. geordneten Paaren)

2. Notation mit gebundenen (lokalen) Variablen, wie in

- Analysis: $\int x^2 \,\mathrm{d}\, x, \sum_{k=0}^{n} k^2$
- Logik: $\forall x \in A : \forall y \in B : P(x, y)$
- Programmierung: `static int foo (int x) { ... }`

Der Lambda-Kalkül

(Alonzo Church, 1936 ... Henk Barendregt, 1984 ...)
ist der Kalkül für Funktionen mit benannten Variablen
die wesentliche Operation ist das Anwenden einer Funktion:

$$(\lambda x.B)A \to B[x := A]$$

Beispiel: $(\lambda x.x * x)(3 + 2) \to (3 + 2) * (3 + 2)$
Im reinen Lambda-Kalkül gibt es *nur* Funktionen—keine Zahlen

Lambda-Terme

Menge Λ der Lambda-Terme (mit Variablen aus einer Menge V):

- (Variable) wenn $x \in V$, dann $x \in \Lambda$
- (Applikation) wenn $F \in \Lambda, A \in \Lambda$, dann $(FA) \in \Lambda$
- (Abstraktion) wenn $x \in V, B \in \Lambda$, dann $(\lambda x.B) \in \Lambda$

das sind also Lambda-Terme: $x, (\lambda x.x), ((xz)(yz)), (\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz)))))$

verkürzte Notation

- Applikation als links-assoziativ auffassen:

$$(\dots((FA_1)A_2)\dots A_n) \sim FA_1A_2\dots A_n$$

  Beispiel: $((xz)(yz)) \sim xz(yz)$

- geschachtelte Abstraktionen unter ein Lambda schreiben:

$$\lambda x_1.(\lambda x_2.\dots(\lambda x_n.B)\dots) \sim \lambda x_1 x_2 \dots x_n.B$$

  Beispiel: $\lambda x.\lambda y.\lambda z.B \sim \lambda xyz.B$

- die vorigen Abkürzungen sind sinnvoll, denn $(\lambda x_1 \dots x_n.B)A_1 \dots A_n$ verhält sich wie eine Anwendung einer mehrstelligen Funktion.

Gebundene Variablen

Def: Menge $\mathrm{FV}(t)$ der *freien Variablen* von $t \in \Lambda$

- $\mathrm{FV}(x) = \{x\}$
- $\mathrm{FV}(FA) = \mathrm{FV}(F) \cup \mathrm{FV}(A)$
- $\mathrm{FV}(\lambda x.B) = \mathrm{FV}(B) \setminus \{x\}$

Def: Menge $\mathrm{BV}(t)$ der *gebundenen Variablen* von $t \in \Lambda$

- $\mathrm{BV}(x) = \emptyset$
-
-

Substitution

$A[x := N]$ ist (eine Kopie von) A, wobei jedes freie Vorkommen von x durch N ersetzt ist. . .

. . . und keine in N frei vorkommende Variable hierdurch gebunden wird

Definition durch strukturelle Induktion

- A ist Variable (2 Fälle)
- A ist Applikation
- A ist Abstraktion
  - $(\lambda x.B)[x := N] = \lambda x.B$
  - $(\lambda y.B)[x := N] = \lambda y.(B[x := N])$,
    falls $x \neq y$ und $\mathrm{BV}(\lambda y.B) \cap \mathrm{FV}(N) = \emptyset$

„falls. . . “ hat zur Folge: Substitution ist *partielle* Fkt.

Das falsche Binden von Variablen

Diese Programme sind *nicht* äquivalent:

```
int f (int y) {
  int x = y + 3; int sum = 0;
  for (int y = 0; y<4; y++)
        { sum = sum + x   ; }
  return sum;
}
int g (int y) {
                 int sum = 0;
  for (int y = 0; y<4; y++)
        { sum = sum + (y+3); }
  return sum;
}
```

Gebundene Umbenennungen

Relation $\to_\alpha$ auf Λ:

- Axiom: $(\lambda x.B) \to_\alpha (\lambda y.B[x := y])$ falls $y \notin V(B)$.

  und Substitution erlaubt

- Abschluß unter Kontext:
$\dfrac{F \to_\alpha F'}{(FA) \to_\alpha (F'A)}$, $\dfrac{A \to_\alpha A'}{(FA) \to_\alpha (FA')}$, $\dfrac{B \to_\alpha B'}{\lambda x.B \to_\alpha \lambda x.B'}$

$\equiv_\alpha$ ist die durch $\to_\alpha$ definierte Äquivalenzrelation
(die transitive, reflexive und symmetrische Hülle von $\to_\alpha$)

Bsp. $\lambda x.\lambda x.x \equiv_\alpha \lambda y.\lambda x.x$, $\lambda x.\lambda x.x \not\equiv_\alpha \lambda y.\lambda x.y$

α-Äquivalenzklassen
wir wollen bei Bedarf gebunden umbenennen, aber das nicht immer explizit hinschreiben: betrachten $\Lambda/\equiv_\alpha$ statt Λ

Wdhlg (1. Sem) wenn R eine Äquivalenz-Relation auf M,

- dann $[x]_R$ (die R-Äquivalenzklasse von x)
  $[x]_R := \{y \mid R(x, y)\}$.
- M/R (die Menge der R-Klassen von M)
  $M/R := \{[x]_R \mid x \in M\}$.

Beispiele:

- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}^2/R$ mit $R((x_1, x_2), (y_1, y_2))) = \dots$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/R$ mit ...
- Nerode-Kongruenz einer formalen Sprache

Ableitungen
Absicht: Relation $\to_\beta$ auf $\Lambda/\equiv_\alpha$ (Ein-Schritt-Ersetzung):

- Axiom: $(\lambda x.B)A \to_\beta B[x := A]$
  ein Term der Form $(\lambda x.B)A$ heißt *Redex* (= reducible expression)
- Abschluß unter Kontext:
  $\dfrac{F \to_\beta F'}{(FA) \to_\beta (F'A)}$, $\dfrac{A \to_\beta A'}{(FA) \to_\beta (FA')}$, $\dfrac{B \to_\beta B'}{\lambda x.B \to_\beta \lambda x.B'}$

Vorsicht:
$(\lambda x.(\lambda y.xyx))(yy) \to_\beta (\lambda y.yx)[x := (yy)] \stackrel{?}{=} \lambda y.y(yy)$
das freie y wird fälschlich gebunden
die Substitution ist nicht ausführbar, man muß vorher lokal umbenennen

Eigenschaften der Reduktion

$\to$ auf Λ ist

- konfluent

  $\forall A, B, C \in \Lambda : A \to_\beta^* B \wedge A \to_\beta^* C \Rightarrow \exists D \in \Lambda : B \to_\beta^* D \wedge C \to_\beta^* D$
- (Folgerung: jeder Term hat höchstens eine Normalform)
- aber nicht terminierend (es gibt Terme mit unendlichen Ableitungen)

  $W = \lambda x.xx, \Omega = WW$.
- es gibt Terme mit Normalform und unendlichen Ableitungen, $KI\Omega$ mit $K = \lambda xy.x, I = \lambda x.x$

Daten als Funktionen

Simulation von Daten (Tupel) durch Funktionen (Lambda-Ausdrücke):

- Konstruktor: $\langle D_1, \ldots, D_k \rangle \Rightarrow \lambda s.sD_1 \ldots D_k$
- Selektoren: $s_i \Rightarrow \lambda t.t(\lambda d_1 \ldots d_k.d_i)$

dann gilt $s_i \langle D_1, \ldots, D_k \rangle \to_\beta^* D_i$

Anwendungen:

- Auflösung simultaner Rekursion
- Modellierung von Zahlen

Lambda-Kalkül als universelles Modell

- Wahrheitswerte:

  $\mathsf{True} = \lambda xy.x, \mathsf{False} = \lambda xy.y$

  (damit läßt sich if-then-else leicht aufschreiben)
- natürliche Zahlen:

  $0 = \lambda x.x; (n + 1) = \langle \mathsf{False}, n \rangle$

  (damit kann man leicht $x > 0$ testen)
- Rekursion?

Fixpunkt-Kombinatoren

- Definition: $\Theta = (\lambda xy.(y(xxy)))(\lambda xy.(y(xxy)))$
- Satz: $\Theta f \to_\beta^* f(\Theta f)$, d. h. Θf ist Fixpunkt von f
- d.h. Θ ist *Fixpunkt-Kombinator*, (T wegen Turing)
- Folgerung: im Lambda-Kalkül kann man beliebige Wiederholung (Schachtelung) von Rechnungen beschreiben

Anwendung:

```
f = \ g x -> if x==0 then 1 else x * g(x-1)
```

Beispiel: $f(\lambda z.z)7 = 7 \cdot (\lambda z.z)6 = 7 \cdot 6$, $f(\lambda z.z)0 = 1$;
$\Theta f 7 \to_\beta^* 7 \cdot (f(\Theta f)6) \to_\beta^* 7 \cdot (6 \cdot (f(\Theta f)5)) \to_\beta^* \dots$

Lambda-Berechenbarkeit

Satz: (Church, Turing)

Menge der Turing-berechenbaren Funktionen
(Zahlen als Wörter auf Band)
Alan Turing: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, Proc. LMS, 2 (1937) 42 (1) 230–265 `https://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230`

$=$ Menge der Lambda-berechenbaren Funktionen
(Zahlen als Lambda-Ausdrücke)
Alonzo Church: A Note on the Entscheidungsproblem, J. Symbolic Logic 1 (1936) 1, 40–41

$=$ Menge der while-berechenbaren Funktionen
(Zahlen als Registerinhalte)

Übung Lambda-Kalkül

- Konstruktor und Selektoren für Paare
- Test, ob der Nachfolger von 0 gleich 0 ist
  (mit λ-kodierten Zahlen)

- Fakultät mittels Θ

  (mit „echten“ Zahlen und Operationen)

folgende Aufgaben aus Barendregt: Lambda Calculus, 1984:

- (Aufg. 6.8.2) Konstruiere $K^\infty \in \Lambda^0$ (ohne freie Variablen) mit $K^\infty x = K^\infty$ (hier und in im folgenden hat $=$ die Bedeutung $\equiv_\beta$)

  Konstruiere $A \in \Lambda^0$ mit $Ax = xA$

- beweise den Doppelfixpunktsatz (Kap. 6.5)

  $\forall F, G : \exists A, B : A = FAB \wedge B = GAB$

- (Aufg. 6.8.14, J.W.Klop)

  $$\begin{aligned} X &= \lambda abcdefghijklmnopqstuvvxyzr. \\ &\quad r(thisisafixedpointcombinator) \\ Y &= X^{27} = \underbrace{X \ldots X}_{27} \end{aligned}$$

  Zeige, daß Y ein Fixpunktkombinator ist.

5 Fixpunkte

Motivation

Das ging bisher gar nicht:

```
let { f = \ x -> if x > 0
                 then x * f (x -1) else 1
    } in  f 5
```

Lösung 1: benutze Fixpunktkombinator

```
let { Theta =  ... } in
let { f = Theta ( \ g -> \ x -> if x > 0
                 then x * g (x - 1) else 1 )
    } in f 5
```

Lösung 2 (später): realisiere Fixpunktberechnung im Interpreter (neuer AST-Knotentyp)

Existenz von Fixpunkten

Fixpunkt von $f :: C \to C$ ist $x :: C$ mit $fx = x$.

Existenz? Eindeutigkeit? Konstruktion?

Satz: Wenn C *pointed CPO* und f *stetig*, dann besitzt f genau einen kleinsten Fixpunkt.

- CPO = complete partial order = vollständige Halbordnung
- complete = jede monotone Folge besitzt Supremum (= kleinste obere Schranke)
- pointed: C hat kleinstes Element $\perp$

Beispiele f. Halbordnungen, CPOs

Halbordnung? pointed? complete?

- $\leq$ auf $\mathbb{N}$
- $\leq$ auf $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- $\leq$ auf $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$
- $\leq$ auf $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1\}$
- Teilbarkeit auf $\mathbb{N}$
- Präfix-Relation auf Σ^*
- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid (x_1 \leq x_2) \vee (y_1 \leq y_2)\}$ auf $\mathbb{R}^2$
- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)\}$ auf $\mathbb{R}^2$
- identische Relation id_M auf einer beliebigen Menge M
- $\{(\perp, x) \mid x \in M_\perp\} \cup \mathrm{id}_M$ auf $M_\perp := \{\perp\} \cup M$

Stetige Funktionen

f ist stetig :=

- f ist monoton: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- und für monotone Folgen $[x_0, x_1, \ldots]$ gilt: $f(\sup[x_0, x_1, \ldots]) = \sup[f(x_0), f(x_1), \ldots]$

Beispiele: in $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \leq)$

- $x \mapsto 42$ ist stetig
- $x \mapsto$ if $x < +\infty$ then $x + 1$ else $+\infty$
- $x \mapsto$ if $x < +\infty$ then 42 else $+\infty$

Satz: Wenn C *pointed CPO* und $f : C \to C$ *stetig*, dann besitzt f genau einen kleinsten Fixpunkt ...

... und dieser ist $\sup[\perp, f(\perp), f^2(\perp), \ldots]$

Funktionen als CPO

- Menge der partiellen Funktionen von B nach B:
  $C = (B \hookrightarrow B)$
- partielle Funktion $f : B \hookrightarrow B$ entspricht totaler Funktion $f : B \to B_\perp$
- C geordnet durch $f \le g \iff \forall x \in B : f(x) \le g(x)$,
  wobei $\le$ die vorhin definierte CPO auf $B_\perp$
- $f \le g$ bedeutet: g ist Verfeinerung von f
- Das Bottom-Element von C ist die überall undefinierte Funktion. (diese heißt auch $\perp$)

Funktionen als CPO, Beispiel
der Operator $F =$

```
\ g -> ( \ x -> if (x==0) then 0
                 else 2 + g (x - 1) )
```

ist stetig auf $(\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N})$ (Beispiele nachrechnen!)
Iterative Berechnung des Fixpunktes:

$$\begin{array}{rcl}
\perp & = & \emptyset \quad \text{überall undefiniert} \\
F\perp & = & \{(0,0)\} \quad \text{sonst } \perp \\
F(F\perp) & = & \{(0,0),(1,2)\} \quad \text{sonst } \perp \\
F^3\perp & = & \{(0,0),(1,2),(2,4)\} \quad \text{sonst } \perp
\end{array}$$

Fixpunktberechnung im Interpreter
Erweiterung der abstrakten Syntax:

```
data Exp = ... | Rec Name Exp
```

Beispiel

```
App
  (Rec g (Abs v (if v==0 then 0 else 2 + g(v-1))))
  5
```

Bedeutung: `Rec x B` bezeichnet den Fixpunkt von $(\lambda x.B)$

Definition der Semantik:

```
value (E, (\x.B)(Rec x B), v)
-----------------------------
value (E, Rec x B, v)
```

Fixpunkte und Laziness

Fixpunkte existieren in pointed CPOs.

- Zahlen: nicht pointed
  (arithmetische Operatoren sind strikt)
- Funktionen: partiell $\Rightarrow$ pointed
  ($\perp$ ist überall undefinierte Funktion)
- Daten (Listen, Bäume usw.): pointed:
  (Konstruktoren sind nicht strikt)

Beispiele in Haskell:

```
fix f = f (fix f)
xs = fix $ \ zs -> 1 : zs
ys = fix $ \ zs ->
    0 : 1 : zipWith (+) zs (tail zs)
```

Simultane Rekursion: letrec

Beispiel (aus: D. Hofstadter, Gödel Escher Bach)

```
letrec { f = \ x -> if x == 0 then 1
                    else x - g(f(x-1))
       , g = \ x -> if x == 0 then 0
                    else x - f(g(x-1))
} in f 15
```

Bastelaufgabe: für welche x gilt $f(x) \neq g(x)$?

weitere Beispiele:

```
letrec { x = 3 + 4 , y = x * x } in x - y
letrec { f = \ x -> .. f (x-1) } in f 3
```

letrec nach rec

mittels der Lambda-Ausdrücke für select und tuple

```
LetRec [(n1,x1), .. (nk,xk)] y
=> ( rec t
      ( let n1 = select1 t
            ...
            nk = selectk t
        in  tuple x1 .. xk ) )
   ( \ n1 .. nk -> y )
```

Übung Fixpunkte

- Limes der Folge $F^k(\perp)$ für

  ```
  F h = \ x -> if x > 23 then x - 11
               else h (h (x + 14))
  ```

- Ist F stetig? Gib den kleinsten Fixpunkt von F an:

  ```
  F h =  \ x -> if x >= 2 then 1 + h(x-2)
      else if x == 1 then 1 else h(4) - 2
  ```

  Hat F weitere Fixpunkte?

- C = Menge der Formalen Sprachen über Σ, halbgeordnet durch $\subseteq$. ist CPO? pointed?
  $h : C \to C : L \mapsto \{\epsilon\} \cup L \cdot \{ab\}$ ist stetig?
  Fixpunkt(e) von h?

6 Zustand/Speicher

Motivation

bisherige Programme sind nebenwirkungsfrei, das ist nicht immer erwünscht:

- direktes Rechnen auf von-Neumann-Maschine: Änderungen im Hauptspeicher
- direkte Modellierung von Prozessen mit Zustandsänderungen ((endl.) Automaten)

Dazu muß semantischer Bereich geändert werden.

- bisher: `Val`, jetzt: `State -> (State, Val)` (dabei ist `(A,B)` die Notation für $A \times B$)

Semantik von (Teil-)Programmen ist Zustandsänderung.

Speicher

```
import qualified Data.Map as M
```

http://hackage.haskell.org/packages/archive/containers/0.5.0.0/doc/html/Data-Map-Lazy.html

```
newtype Addr = Addr Int
type Store = M.Map Addr Val
newtype Action a =
    Action ( Store -> ( Store, a ))
```

spezifische Aktionen:

```
new :: Val -> Action Addr
get :: Addr -> Action Val
put :: Addr -> Val -> Action ()
```

Aktion ausführen, Resultat liefern:

```
run :: Store -> Action a -> a
```

Auswertung von Ausdrücken

Ausdrücke (mit Nebenwirkungen):

```
date Exp = ...
   | New Exp | Get Exp | Put Exp Exp
```

Resultattyp des Interpreters ändern:

```
value    :: Env -> Exp ->        Val
evaluate :: Env -> Exp -> Action Val
```

semantischen Bereich erweitern:

```
data Val = ...
    | ValAddr Addr
    | ValFun ( Val -> Action Val )
```

Aufruf des Interpreters:

```
run Store.empty $ evaluate undefined $ ...
```

Änderung der Hilfsfunktionen

bisher:

```
with_int :: Val -> ( Int -> Val ) -> Val
with_int v k = case v of
    ValInt i -> k i
    v -> ValErr "ValInt expected"
```

jetzt:

```
with_int :: Action Val
  -> ( Int -> Action Val ) -> Action Val
with_int m k = m >>= \ v -> case v of ...
```

Hauptprogramm muß kaum geändert werden (!)

Speicher-Aktionen als Monade

generische Aktionen/Verknüpfungen:

- nichts tun (return), • nacheinander (bind, >>=)

```
class Monad m where
  return :: a -> m a
  (>>=) :: m a
        -> (a -> m b) -- Continuation
        -> m b
instance Monad Action where
  return x = Action $ \ s -> ( s, x )
  Action a >>= f = Action $ \ s -> ...
```

Variablen?

in unserem Modell haben wir:

- veränderliche Speicherstellen,
- aber immer noch unveränderliche „Variablen“ (lokale Namen)

⇒ der Wert eines Namens kann eine Speicherstelle sein, aber dann immer dieselbe.

Imperative Programmierung

es fehlen noch wesentliche Operatoren:

- Nacheinanderausführung (Sequenz)
- Wiederholung (Schleife)

diese kann man:

- simulieren (durch `let`)
- als neue AST-Knoten realisieren (Übung)

Rekursion

mehrere Möglichkeiten zur Realisierung

- mit Fixpunkt-Kombinator (bekannt)
- in der Gastsprache des Interpreters
  (dabei neu: Fixpunkte von Aktionen)
- (neu:) simulieren (in der interpretierten Sprache)
  durch Benutzung des Speichers

Rekursion (semantisch)

bisher:

```
fix :: ( a -> a ) -> a
fix f = f ( fix f )
```

jetzt:

```
import Control.Monad.Fix
class MonadFix m where
    mfix :: ( a -> m a ) -> m a

instance MonadFix Action where
mfix f = Action $ \ s0 ->
    let Action a = f v
        ( s1, v ) = a s0
    in  ( s1, v )
```

Rekursion (operational)

Idee: eine Speicherstelle anlegen und als Vorwärtsreferenz auf das Resultat der Rekursion benutzen

```
Rec n (Abs x b)  ==>
    a := new 42
    put a ( \ x -> let { n = get a } in b )
    get a
```

Speicher—Übung

Fakultät imperativ:

```
let { fak = \ n ->
        { a := new 1 ;
          while ( n > 0 )
            { a := a * n ; n := n - 1; }
          return a;
        }
    } in  fak 5
```

1. Schleife durch Rekursion ersetzen und Sequenz durch `let`:

   ```
   fak = let { a = new 1 }
         in  Rec f ( \ n -> ... )
   ```

2. Syntaxbaumtyp erweitern um Knoten für Sequenz und Schleife

7 Monaden

... unter verschiedenen Aspekten

- unsere Motivation: semantischer Bereich,
  `return :: a -> m a` als leere Aktion,
  Operator `(>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b` zum Verknüpfen von Aktionen
- auch nützlich: `do`-Notation (anstatt Ketten von `>>=`)
- die Wahrheit: *a monad in X is just a monoid in the category of endofunctors of X*
- die ganze Wahrheit:
  `Functor m => Applicative m => Monad m`
- weitere Anwendungen: `IO`, Parser-Kombinatoren

Die Konstruktorklasse Monad

Definition:

```
class Monad m where
    return  :: a -> m a
    ( >>= ) :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

Benutzung der Methoden:

```
evaluate e l >>= \ a ->
evaluate e r >>= \ b ->
return ( a + b )
```

Do-Notation für Monaden

```
evaluate e l >>= \ a ->
    evaluate e r >>= \ b ->
        return ( a + b )
```

do-Notation (explizit geklammert):

```
do { a <- evaluate e l
   ; b <- evaluate e r
   ; return ( a + b )
   }
```

do-Notation (implizit geklammert):

```
do a <- evaluate e l
   b <- evaluate e r
   return ( a + b )
```

Haskell: implizite Klammerung nach `let`, `do`, `case`, `where`

Beispiele für Monaden

- Aktionen mit Speicheränderung (vorige Woche)
  `Action (Store -> (Store, a))`
- Aktionen mit Welt-Änderung: `IO a`
- Transaktionen (Software Transactional Memory) `STM a`
- Aktionen, die möglicherweise fehlschlagen:
  `data Maybe a = Nothing | Just a`
- Nichtdeterminismus (eine Liste von Resultaten): `[a]`
- Parser-Monade (nächste Woche)

Die IO-Monade

```
data IO a -- abstract
instance Monad IO -- eingebaut

readFile :: FilePath -> IO String
putStrLn :: String -> IO ()
```

Alle „Funktionen“, deren Resultat von der Außenwelt (Systemzustand) abhängt, haben Resultattyp `IO ...`, sie sind tatsächlich *Aktionen*.

Am Typ einer Funktion erkennt man ihre möglichen Wirkungen bzw. deren garantierte Abwesenheit.

```
main :: IO ()
main = do
   cs <- readFile "foo.bar" ; putStrLn cs
```

Grundlagen: Kategorien

- *Kategorie* C hat Objekte Obj_C und Morphismen Mor_C,
  jeder Morphismus m hat als Start (S) und Ziel (T) ein Objekt, Schreibweise: $m : S \to T$ oder $m \in \text{Mor}_C(S,T)$
- für jedes $O \in \text{Obj}_C$ gibt es $\text{id}_O : O \to O$
- für $f : S \to M$ und $f : M \to T$ gibt es $f \circ g : S \to T$.
  es gilt immer $f \circ \text{id} = f$, $\text{id} \circ g = g$, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Beispiele:

- Set: Obj_{Set} = Mengen, Mor_{Set} = totale Funktionen
- Grp: Obj_{Grp} = Gruppen, Mor_{Set} = Homomorphismen
- für jede Halbordnung $(M, \leq)$: $\text{Obj} = M, \text{Mor} = (\leq)$
- Hask: Obj_{Hask} = Typen, Mor_{Hask} = Funktionen

Kategorische Definitionen

Beispiel: Isomorphie

- eigentlich: Abbildung, die die Struktur (der abgebildeten Objekte) erhält
- Struktur von $O \in \text{Obj}(C)$ ist aber unsichtbar

- Eigenschaften von Objekten werden beschrieben durch Eigenschaften ihrer Morphismen (vgl. abstrakter Datentyp, API)
  Bsp: $f : A \to B$ ist *Isomorphie* (kurz: ist iso), falls es ein $g : B \to A$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_A \wedge g \circ f = \mathrm{id}_B$

weiteres Beispiel

- $m : a \to b$ monomorph: $\forall f, g : f \circ m = g \circ m \Rightarrow f = g$

Produkte

- Def: P ist ***Produkt*** von A_1 und A_2 mit Projektionen $\mathrm{proj}_1 : P \to A_1, \mathrm{proj}_2 : P \to A_2$,

  wenn für jedes B und Morphismen $f_1 : B \to A_1, f_2 : B \to A_2$

  es existiert genau ein $g : B \to P$ mit $g \circ \mathrm{proj}_1 = f_1$ und $g \circ \mathrm{proj}_2 = f_2$

- für Set ist das wirklich das Kreuzprodukt

- für die Kategorie einer Halbordnung?

- für Gruppen? (Beispiel?)

Dualität

- Wenn ein Begriff kategorisch definiert ist,

  erhält man den dazu *dualen* Begriff durch Spiegeln aller Pfeile

- Bsp: dualer Begriff zu *Produkt*:

  Definition hinschreiben, Beispiele angeben

- Bsp: dualer Begriff zu: monomorph

- entsprechend: die duale Aussage

  diese gilt gdw. die originale (primale) Aussage gilt

Übung (1)

- der identische Morphismus jedes Objektes ist eindeutig bestimmt
- Def. epi, mono, Dualität, Beispiele
- Schubert Satz 6.4.2 (prismatisches Diagramm)
- ... die dazu duale Aussage
- Kategorie der Graphen (was sind die Morphismen?)

Funktoren

- Def: Funktor F von Kategorie C nach Kategorie D:
  - einer Wirkung auf Objekte: $F_{\text{Obj}} : \text{Obj}(C) \to \text{Obj}(D)$
  - einer Wirkung auf Pfeile: $F_{\text{Mor}} : (g : s \to t) \mapsto (g' : F_{\text{Obj}}(S) \to F_{\text{Obj}}(T))$

  mit den Eigenschaften:
  - $F_{\text{Mor}}(\text{id}_o) = \text{id}_{F_{\text{Obj}}(o)}$
  - $F_{\text{Mor}}(g \circ_C h) = F_{\text{Mor}}(g) \circ_D F_{\text{Mor}}(h)$
- Bsp: Funktoren zw. Kategorien von Halbordnungnen?
- ```
  class Functor f where
    fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
  ```
  Beispiele: `List, Maybe, Action`

Die Kleisli-Konstruktion

- Plan: für Kategorie C, Endo-Funktor $F : C \to C$

  definiere sinnvolle Struktur auf Pfeilen $s \to Ft$
- Durchführung: die Kleisli-Kategorie K von F:

  $\text{Obj}(K) = \text{Obj}(C)$, Pfeile: $s \to Ft$
- ... K ist tatsächlich eine Kategorie, wenn:
  - identische Morphismen (`return`), Komposition (>=>)
  - mit passenden Eigenschaften
  ```

$(F,$ `return`, `(>=>)` $)$ heißt dann *Monade*

Diese Komposition ist

```
f >=> g  =  \ x -> (f x >>= g)
```

Functor, Applicative, Monad

https://wiki.haskell.org/Functor-Applicative-Monad_Proposal

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
class Functor f => Applicative f where
  pure :: a -> f a
  (<*>) :: f (a -> b) -> (f a -> f b)
class Applicative m => Monad m where
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

eine Motivation: effizienterer Code für `>>=`, wenn das rechte Argument konstant ist
(d.h. die Folge-Aktion hängt nicht vom Resultat der ersten Aktion ab: dann ist Monad nicht nötig, es reicht Applicative)

Übung (2)

- Funktor- und Monadengesetze ausprobieren (ghci)
- „falsche“ Functor- und Monad-Instanzen für Maybe, List, Tree
  (d.h. typkorrekt, aber semantisch falsch)
- optional: inverse Zustandsmonade

Die Maybe-Monade

```
data Maybe a = Nothing | Just a
instance Monad Maybe where ...
```

Beispiel-Anwendung:

```
case ( evaluate e l ) of
    Nothing -> Nothing
    Just a  -> case ( evaluate e r ) of
        Nothing -> Nothing
        Just b  -> Just ( a + b )
```

mittels der Monad-Instanz von Maybe:

```
evaluate e l >>= \ a ->
    evaluate e r >>= \ b ->
        return ( a + b)
```

Ü: dasselbe mit do-Notation

List als Monade

```
instance Monad [] where
    return = \ x - > [x]
    m >>= f = case m of
        []      -> []
        x : xs -> f x ++ ( xs >>= f )
```

Beispiel:

```
do a <- [ 1 .. 4 ]
   b <- [ 2 .. 3 ]
   return ( a * b )
```

Monaden: Zusammenfassung

- verwendet zur Definition semantischer Bereiche,
- Monade = Monoid über Endofunktoren in Hask,
  (Axiome für `return`, >=> bzw. >>=)
- Notation `do { x <- foo ; bar ; .. }`
  (>>= ist das benutzer-definierte Semikolon)
- Grundlagen: Kategorien-Theorie (ca. 1960),
  in Funktl. Prog. seit ca. 1990 `http://homepages.inf.ed.ac.uk/wadler/topics/monads.html`
- in anderen Sprachen: F#: *Workflows*, C#: LINQ-Syntax
- GHC ab 7.10: `Control.Applicative`: `pure` und `<*>`
  (= `return` und eingeschränktes >>=)

8 Kombinator-Parser

Datentyp für Parser

```
data Parser c a =
     Parser ( [c] -> [ (a, [c]) ] )
```

- über Eingabestrom von Zeichen (Token) c,
- mit Resultattyp a,
- nichtdeterministisch (List).

Beispiel-Parser, Aufrufen mit:

```
parse :: Parser c a -> [c] -> [(a,[c])]
parse (Parser f) w = f w
```

Elementare Parser (I)

```
-- | das nächste Token
next :: Parser c c
next = Parser $ \ toks -> case toks of
    [] -> []
    ( t : ts ) -> [ ( t, ts ) ]
-- | das Ende des Tokenstroms
eof :: Parser c ()
eof = Parser $ \ toks -> case toks of
    [] -> [ ( (), [] ) ]
    _  -> []
-- | niemals erfolgreich
reject :: Parser c a
reject = Parser $ \ toks -> []
```

Monadisches Verketten von Parsern

Definition:

```
instance Monad ( Parser c ) where
    return x = Parser $ \ s ->
        return ( x, s )
```

```
Parser f >>= g = Parser $ \ s -> do
    ( a, t ) <- f s
    let Parser h = g a
    h t
```

beachte: das *return/do* gehört zur List-Monade
Anwendungsbeispiel:

```
p :: Parser c (c,c)
p = do x <- next ; y <- next ; return (x,y)
```

Elementare Parser (II)

```
satisfy :: ( c -> Bool ) -> Parser c c
satisfy p = do
    x <- next
    if p x then return x else reject

expect :: Eq c => c -> Parser c c
expect c = satisfy ( == c )

ziffer :: Parser Char Integer
ziffer = do
    c <- satisfy Data.Char.isDigit
    return $ fromIntegral
           $ fromEnum c - fromEnum '0'
```

Kombinatoren für Parser (I)

- Folge (and then) (ist >>= aus der Monade)
- Auswahl (or)

  ```
  ( <|> ) :: Parser c a -> Parser c a -> Parser c a
  Parser f <|> Parser g = Parser $ \ s -> f s ++ g s
  ```

- Wiederholung (beliebig viele)

  ```
  many, many1 :: Parser c a -> Parser c [a]
  many p = many1 p <|> return []
  many1 p = do x <- p; xs <- many p; return $ x : xs
  ```

```
zahl :: Parser Char Integer = do
   zs <- many1 ziffer
   return $ foldl ( \ a z -> 10*a+z ) 0 zs
```

Kombinator-Parser und Grammatiken

Grammatik mit Regeln $S \to aSbS, S \to \epsilon$ entspricht

```
s :: Parser Char ()
s =   do { expect 'a' ; s ; expect 'b' ; s }
  <|> return ()
```

Anwendung: `exec "abab" $ do s ; eof`

Robuste Parser-Bibliotheken

Designfragen:

- asymmetrisches `<|>`
- Nichtdeterminismus einschränken
- Fehlermeldungen (Quelltextposition)

Beispiel: Parsec (Autor: Daan Leijen) `http://www.haskell.org/haskellwiki/Parsec`

Asymmetrische Komposition

gemeinsam:

```
(<|>) :: Parser c a -> Parser c a
      -> Parser c a
Parser p <|> Parser q = Parser $ \ s -> ...
```

- symmetrisch: `p s ++ q s`
- asymmetrisch: `if null p s then q s else p s`

Anwendung: `many` liefert nur maximal mögliche Wiederholung (nicht auch alle kürzeren)

Nichtdeterminismus einschränken

- Nichtdeterminismus = Berechnungsbaum = Backtracking
- asymmetrisches `p <|> q` : probiere erst `p`, dann `q`
- häufiger Fall: `p` lehnt „sofort“ ab

Festlegung (in Parsec): wenn `p` wenigstens ein Zeichen verbraucht, dann wird `q` nicht benutzt (d. h. `p` muß erfolgreich sein)

Backtracking dann nur durch `try p <|> q`

Fehlermeldungen

- Fehler = Position im Eingabestrom, bei der es „nicht weitergeht“
- und auch durch Backtracking keine Fortsetzung gefunden wird
- Fehlermeldung enthält:
  - Position
  - Inhalt (Zeichen) der Position
  - Menge der Zeichen mit Fortsetzung

Pretty-Printing (I)

John Hughes’s and Simon Peyton Jones’s Pretty Printer Combinators

Based on *The Design of a Pretty-printing Library* in *Advanced Functional Programming*, Johan Jeuring and Erik Meijer (eds), LNCS 925

`http://hackage.haskell.org/packages/archive/pretty/1.0.1.0/doc/html/Text-PrettyPrint-HughesPJ.html`

Pretty-Printing (II)

- `data Doc` abstrakter Dokumententyp, repräsentiert Textblöcke
- Konstruktoren:

```
text :: String -> Doc
```

- Kombinatoren:

```
vcat       :: [ Doc ] -> Doc -- vertikal
hcat, hsep :: [ Doc ] -> Doc -- horizontal
```

- Ausgabe: `render :: Doc -> String`

Bidirektionale Programme

Motivation: parse und (pretty-)print aus *einem* gemeinsamen Quelltext

Tillmann Rendel and Klaus Ostermann: *Invertible Syntax Descriptions*, Haskell Symposium 2010

`http://lambda-the-ultimate.org/node/4191`

Datentyp

```
data PP a = PP
  { parse :: String -> [(a,String)]
  , print :: a -> Maybe String
  }
```

Spezifikation, elementare Objekte, Kombinatoren?

9 Ablaufsteuerung/Continuations

Definition

(alles nach: Turbak/Gifford Ch. 17.9)

CPS-Transformation (continuation passing style):

- original: Funktion gibt Wert zurück

  ```
  f == (abs (x y) (let ( ... ) v))
  ```

- cps: Funktion erhält zusätzliches Argument, das ist eine *Fortsetzung* (continuation), die den Wert verarbeitet:

  ```
  f-cps == (abs (x y k) (let ( ... ) (k v))
  ```

aus `g (f 3 2)` wird `f-cps 3 2 g-cps`

Motivation

Funktionsaufrufe in CPS-Programm kehren nie zurück, können also als Sprünge implementiert werden!

CPS als einheitlicher Mechanismus für

- Linearisierung (sequentielle Anordnung von primitiven Operationen)
- Ablaufsteuerung (Schleifen, nicht lokale Sprünge)
- Unterprogramme (Übergabe von Argumenten und Resultat)
- Unterprogramme mit mehreren Resultaten

CPS für Linearisierung

`(a + b) * (c + d)` wird übersetzt (linearisiert) in

```
( \ top ->
   plus a b $ \ x ->
   plus c d $ \ y ->
   mal  x y top
) ( \ z -> z )

plus x y k = k (x + y)
mal  x y k = k (x * y)
```

später tatsächlich als Programmtransformation (Kompilation)

CPS für Resultat-Tupel

wie modelliert man Funktion mit mehreren Rückgabewerten?

- benutze Datentyp Tupel (Paar):

  ```
  f : A -> (B, C)
  ```

- benutze Continuation:

  ```
  f/cps : A -> (B -> C -> D) -> D
  ```

CPS/Tupel-Beispiel

erweiterter Euklidischer Algorithmus:

```
prop_egcd x y =
    let (p,q) = egcd x y
    in  (p*x + q*y) == gcd x y

egcd :: Integer -> Integer
     -> ( Integer, Integer )
egcd x y = if y == 0 then ???
           else let (d,m) = divMod x y
                    (p,q) = egcd y m
                in  ???
```

vervollständige, übersetze in CPS

CPS für Ablaufsteuerung

Wdhlg: CPS-Transformation von `1+(2*(3-(4+5)))` ist

```
\ top -> plus 4 5 $ \ a ->
         minus 3 a $ \ b ->
         mal 2 b $ \ c ->
         plus 1 c top
```

Neu: `label` und `jump`

```
1 + label foo (2 * (3 - jump foo (4 + 5)))
```

Semantik: durch `label` wird die aktuelle Continuation benannt: `foo = \ c -> plus 1 c top` und durch `jump` benutzt:

```
\ top -> plus 4 5 $ \ a -> foo a
```

Vergleiche: `label`: Exception-Handler deklarieren, `jump`: Exception auslösen

Semantik für CPS

Semantik von Ausdruck `x` in Umgebung E
ist Funktion von Continuation nach Wert (Action)

```
value(E, label L B) = \ k ->
  value (E[L/k], B) k
value (E, jump L B) = \ k ->
  value (E, L) $ \ k' ->
  value (E, B) k'
```

Beispiel 1:

```
value (E, label x x)
  = \ k -> value (E[x/k], x) k
  = \ k -> k k
```

Beispiel 2

```
value (E, jump (label x x)(label y y))
= \ k ->
  value (E, label x x) $ \ k' ->
  value (E, label y y) k'
= \ k ->
  value (E, label y y) (value (E, label x x))
= \ k -> ( \ k0 -> k0 k0 ) ( \ k1 -> k1 k1 )
```

Semantik

semantischer Bereich:

```
type Continuation a = a -> Action Val
date CPS a
   = CPS ( Continuation a -> Action Val )
evaluate :: Env -> Exp -> CPS Val
```

Plan:

- Syntax: `Label, Jump`, Parser
- Semantik:
  - Verkettung durch >>= aus `instance Monad CPS`
  - Einbetten von `Action Val` durch `lift`
  - evaluate für bestehende Sprache (CBV)
  - evaluate für label und jump

CPS als Monade

```
feed :: CPS a -> ( a -> Action Val )
     -> Action Val
feed ( CPS s ) c = s c

feed ( s >>= f ) c =
    feed s ( \ x -> feed ( f x ) c )

feed ( return x ) c = c x

lift :: Action a -> CPS a
```

Beispiele/Übung KW 50: Parser

- Parser für `\x y z -> ...`, benutze `foldr`
- Parser für `let { f x y = ... } in ...`
- Parser für `let { a = b ; c = d ; ... } in ..`
- `Text.Parsec.Combinator.notFollowedBy` zur Erkennung von Schlüsselwörtern
- Ziffern in Bezeichnern

Beispiele/Übung KW 50: CPS

Rekursion (bzw. Schleifen) mittels Label/Jump
(und ohne Rec oder Fixpunkt-Kombinator)
folgende Beispiele sind aus Turbak/Gifford, DCPL, 9.4.2

- Beschreibe die Auswertung (Datei `ex4.hs`)

```
let { d = \ f -> \ x -> f (f x) }
in  let { f = label l ( \ x -> jump l x ) }
    in  f d ( \ x -> x + 1 ) 0
```

- `jump (label x x) (label y y)`
- Ersetze `undefined`, so daß `f x = x!` (Datei `ex5.hs`)

```
let { triple x y z = \ s -> s x y z
    ; fst t = t ( \ x y z -> x )
    ; snd t = t ( \ x y z -> y )
    ; thd t = t ( \ x y z -> z )
    ; f x = let { p = label start undefined
                ; loop = fst p ; n = snd p ; a = thd p
                } in if  0 == n then a
                     else loop (triple loop (n - 1) (n * a))
    } in f 5
```

10 Typen

Grundlagen

Typ = statische Semantik
(Information über mögliches Programm-Verhalten, erhalten ohne Programm-Ausführung)
formale Beschreibung:

- P: Menge der Ausdrücke (Programme)
- T: Menge der Typen
- Aussagen $p :: t$ (für $p \in P$, $t \in T$)
  - prüfen oder
  - herleiten (inferieren)

Inferenzsystem für Typen (Syntax)

- Grundbereich: Aussagen der Form $E \vdash X : T$
  (in Umgebung E hat Ausdruck X den Typ T)
- Menge der Typen:
  - primitiv: Int, Bool
  - zusammengesetzt:
    * Funktion $T_1 \to T_2$
    * Verweistyp $\mathrm{Ref}\, T$
    * Tupel $(T_1, \ldots, T_n)$, einschl. $n = 0$
- Umgebung bildet Namen auf Typen ab

Inferenzsystem für Typen (Semantik)

- Axiome f. Literale: $E \vdash$ Zahl-Literal : Int, …
- Regel für prim. Operationen: $\dfrac{E \vdash X : \text{Int}, E \vdash Y : \text{Int}}{E \vdash (X + Y) : \text{Int}}, \ldots$
- Abstraktion/Applikation: …
- Binden/Benutzen von Bindungen: …

hierbei (vorläufige) Design-Entscheidungen:

- Typ eines Ausdrucks wird inferiert
- Typ eines Bezeichners wird ...
  - in Abstraktion: deklariert
  - in Let: inferiert

Inferenz für Let
(alles ganz analog zu Auswertung von Ausdrücken)

- Regeln für Umgebungen
  - $E[v := t] \vdash v : t$
  - $\dfrac{E \vdash v' : t'}{E[v := t] \vdash v' : t'}$ für $v \neq v'$
- Regeln für Bindung:
$$\frac{E \vdash X : s, \quad E[v := s] \vdash Y : t}{E \vdash \texttt{let}\, v = X \,\texttt{in}\, Y : t}$$

Applikation und Abstraktion

- Applikation:
$$\frac{E \vdash F : T_1 \to T_2, \quad E \vdash A : T_1}{E \vdash (FA) : T_2}$$

  vergleiche mit *modus ponens*
- Abstraktion (mit deklariertem Typ der Variablen)
$$\frac{E[v := T_1] \vdash X : T_2}{E \vdash (\lambda(v :: T_1) X) : T_1 \to T_2}$$

Eigenschaften des Typsystems

Wir haben hier den *einfach getypten Lambda-Kalkül* nachgebaut:

- jedes Programm hat höchstens einen Typ
- nicht jedes Programm hat einen Typ.

  Der Y-Kombinator $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ hat keinen Typ
- jedes getypte Programm terminiert

  (Begründung: bei jeder Applikation FA ist der Typ von FA kleiner als der Typ von F)

Übung: typisiere `t t t t succ 0` mit `succ = \ x -> x + 1` und `t = \ f x -> f (f x)`

11 Polymorphe Typen

Motivation

ungetypt:

```
let { t = \ f x -> f (f x)
    ; s = \ x -> x + 1
    } in (t t s) 0
```

einfach getypt nur so möglich:

```
let { t2 = \ (f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int))
             (x :: Int -> Int) -> f (f x)
    ; t1 = \ (f :: Int -> Int) (x :: Int) -> f (f x)
    ; s = \ (x :: Int) -> x + 1
    } in (t2 t1 s) 0
```

wie besser?

Typ-Argumente (Beispiel)

Typ-Abstraktion, Typ-Applikation:

```
let { t = \ <t>
         -> \ ( f : t -> t ) ->
              \ ( x : t ) ->
```

```
                        f ( f x )
     ; s = \ ( x : int ) -> x + 1
     }
in   (((t <int -> int>) (t <int>)) s) 0
```

zur Laufzeit werden die Abstraktionen und Typ-Applikationen *ignoriert*

Typ-Argumente (Regeln)

neuer Typ $\forall t.T$,
neue Ausdrücke mit Inferenz-Regeln:

- Typ-Abstraktion: erzeugt parametrischen Typ

$$\frac{E \vdash \dots}{E \vdash \Lambda t \to X : \dots}$$

- Typ-Applikation: instantiiert param. Typ

$$\frac{E \vdash F : \dots}{E \vdash F\langle T_2 \rangle : \dots}$$

Ü: Vergleich Typ-Applikation mit expliziter Instantiierung von polymorphen Methoden in C#

Inferenz allgemeingültige Formeln

Grundbereich: aussagenlogische Formeln (mit Variablen und Implikation)
Axiom-Schemata: $\frac{}{X \to (Y \to X)}$, $\frac{}{(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))}$ Regel-Schema (*modus ponens*): $\frac{X \to Y, X}{Y}$
Beobachtungen/Fragen:

- Übung (autotool): Leite $p \to p$ ab.
- (*Korrektheit*): jede ableitbare Formel ist allgemeingültig
- (*Vollständigkeit*): sind alle allgemeingültigen Formeln (in dieser Signatur) ableitbar?

Typen und Daten

- bisher: Funktionen von Daten nach Daten
  `\ (x :: Int) -> x + 1`
- heute: Funktionen von Typ nach Daten
  `\ (t :: Type) -> \ (x :: t) -> x`
- Funktionen von Typ nach Typ (ML, Haskell, Java, C#)
  `\ (t :: Type) -> List t`
- Funktionen von Daten nach Typ (*dependent types*)
  `\ (t :: Typ) (n :: Int) -> Array t n`
  Sprachen: Cayenne, Coq, Agda
  Eigenschaften: Typkorrektheit i. A. nicht entscheidbar,
  d. h. Programmierer muß Beweis hinschreiben.

12 Typ-Rekonstruktion

Motivation

Bisher: Typ-Deklarationspflicht für Variablen in Lambda.

scheint sachlich nicht nötig. In vielen Beispielen kann man die Typen einfach rekonstruieren:

```
let { t = \ f x -> f (f x)
    ; s = \ x -> x + 1
    } in t s 0
```

Diesen Vorgang automatisieren!

(zunächst für einfaches (nicht polymorphes) Typsystem)

Realisierung mit Constraints

Inferenz für Aussagen der Form $E \vdash X : (T, C)$

- E: Umgebung (Name $\to$ Typ)
- X: Ausdruck (Exp)
- T: Typ

- C: Menge von Typ-Constraints

wobei

- Menge der Typen T erweitert um Variablen
- Constraint: Paar von Typen (T_1, T_2)
- Lösung eines Constraints: Substitution σ mit $T_1\sigma = T_2\sigma$

Inferenzregeln f. Rekonstruktion (Plan)

Plan:

- Aussage $E \vdash X : (T, C)$ ableiten,
- dann C lösen (allgemeinsten Unifikator σ bestimmen)
- dann ist $T\sigma$ der (allgemeinste) Typ von X (in Umgebung E)

Für (fast) jeden Teilausdruck eine eigene („frische“) Typvariable ansetzen, Beziehungen zwischen Typen durch Constraints ausdrücken.

Inferenzregeln? Implementierung? — Testfall:

```
\ f g x y ->
   if (f x y) then (x+1) else (g (f x True))
```

Inferenzregeln f. Rekonstrukion

- primitive Operationen (Beispiel)

$$\frac{E \vdash X_1 : (T_1, C_1), \quad E \vdash X_2 : (T_2, C_2)}{E \vdash X_1 + X_2 : (\text{Int}, \{T_1 = \text{Int}, T_2 = \text{Int}\} \cup C_1 \cup C_2)}$$

- Applikation

$$\frac{E \vdash F : (T_1, C_1), \quad E \vdash A : (T_2, C_2)}{E \vdash (FA) : \ldots}$$

- Abstraktion

$$\frac{\ldots}{E \vdash \lambda x.B : \ldots}$$

- (Ü) Konstanten, Variablen, if/then/else

Substitutionen (Definition)

- Signatur $\Sigma = \Sigma_0 \cup \dots \Sigma_k$,
- $\mathrm{Term}(\Sigma, V)$ ist kleinste Menge T mit $V \subseteq T$ und $\forall 0 \le i \le k, f \in \Sigma_i, t_1 \in T, \dots, t_i \in T : f(t_1, \dots, t_i) \in T$.

  (hier Anwendung für Terme, die Typen beschreiben)
- Substitution: partielle Abbildung $\sigma : V \to \mathrm{Term}(\Sigma, V)$,

  Definitionsbereich: $\operatorname{dom} \sigma$, Bildbereich: $\operatorname{img} \sigma$.
- Substitution σ auf Term t anwenden: $t\sigma$
- σ heißt *pur*, wenn kein $v \in \operatorname{dom} \sigma$ als Teilterm in $\operatorname{img} \sigma$ vorkommt.

Substitutionen: Produkt

Produkt von Substitutionen: $t(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (t\sigma_1)\sigma_2$

Beispiel 1:
$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto a\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$.
Beispiel 2 (nachrechnen!):
$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto X\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2$
Eigenschaften:

- σ pur $\Rightarrow \sigma$ idempotent: $\sigma \circ \sigma = \sigma$
- σ_1 pur $\wedge$ σ_2 pur impliziert nicht $\sigma_1 \circ \sigma_2$ pur

Implementierung:

```
import Data.Map
type Substitution = Map Identifier Term
times :: Substitution -> Substitution -> Substition
```

Substitutionen: Ordnung

Substitution σ_1 ist *allgemeiner als* Substitution σ_2:
$\sigma_1 \lesssim \sigma_2 \iff \exists \tau : \sigma_1 \circ \tau = \sigma_2$
Beispiele:

- $\{X \mapsto Y\} \lesssim \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$,

- $\{X \mapsto Y\} \lesssim \{Y \mapsto X\}$,
- $\{Y \mapsto X\} \lesssim \{X \mapsto Y\}$.

Eigenschaften

- Relation $\lesssim$ ist Prä-Ordnung (…, …, aber nicht …)
- Die durch $\lesssim$ erzeugte Äquivalenzrelation ist die …

Unifikation—Definition

Unifikationsproblem

- Eingabe: Terme $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(\Sigma, V)$
- Ausgabe: ein allgemeinster Unifikator (mgu): Substitution σ mit $t_1\sigma = t_2\sigma$.

(allgemeinst: infimum bzgl. $\lesssim$)
Satz: jedes Unifikationsproblem ist

- entweder gar nicht
- oder bis auf Umbenennung eindeutig

lösbar.

Unifikation—Algorithmus

$\mathrm{mgu}(s, t)$ nach Fallunterscheidung

- s ist Variable: …
- t ist Variable: symmetrisch
- $s = (s_1 \to s_2)$ und $t = (t_1 \to t_2)$: …

```
mgu :: Term -> Term -> Maybe Substitution
```

Unifikation—Komplexität

Bemerkungen:

- gegebene Implementierung ist korrekt, übersichtlich, aber nicht effizient,
- (Ü) es gibt Unif.-Probl. mit exponentiell großer Lösung,
- eine komprimierte Darstellung davon kann man aber in Polynomialzeit ausrechnen.

Bsp: Signatur $\{f/2, a/0\}$,
unifiziere $f(X_1, f(X_2, f(X_3, f(X_4, a))))$ mit $f(f(X_2, X_2), f(f(X_3, X_3), f(f(X_4, X_4), f(a, a))))$

Rekonstruktion polymorpher Typen

…ist im Allgemeinen nicht möglich:

Joe Wells: *Typability and Type Checking in System F Are Equivalent and Undecidable*, Annals of Pure and Applied Logic 98 (1998) 111–156, `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.6.6483`

übliche Einschränkung (ML, Haskell): *let-Polymorphismus*:

Typ-Abstraktionen nur für let-gebundene Bezeichner:

```
let { t = \ f x -> f(f x) ; s = \ x -> x+1 }
in t t s 0
```

folgendes ist dann nicht typisierbar (`t` ist monomorph):

```
( \ t -> let { s = \ x -> x+1 } in t t s 0 )
  ( \ f x -> f (f x) )
```

Implementierung

Luis Damas, Roger Milner: *Principal Type Schemes for Functional Programs* 1982,

- Inferenzsystem ähnlich zu Rekonstruktion monomorpher Typen mit Aussagen der Form $E \vdash X : (T, C)$
- Umgebung E ist jetzt partielle Abbildung von Name nach *Typschema* (nicht wie bisher: nach Typ).
- Bei Typinferenz für let-gebundene Bezeichner wird über die freien Typvariablen generalisiert.
- Dazu Teil-Constraint-Systeme lokal lösen.

Grabmüller 2006 `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.65.7733`, Jones 1999 `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.134.7274`

13 Übung: Tupel

Tupel

- abstrakte Syntax

  ```
  data Exp = .. | Tuple [Exp] | Nth Exp Int
  ```

- konkrete Syntax (runde Klammern, Kommas, keine 1-Tupel)
- dynamische Semantik: `data Val = ..` , `Interpreter.value`
- statische Semantik (Typen)
  - abstrakte Syntax
  - konkrete Syntax (für Typrekonstruktion nicht nötig)
  - Typisierung (Inferenzregeln, Implementierung)

14 Plan für Compiler

Transformationen/Ziel

- continuation passing (Programmablauf explizit)
- closure conversion (alle Umgebungen explizit)
- lifting (alle Unterprogramme global)
- Registervergabe (alle Argumente in Registern)

Ziel: maschinen(nahes) Programm mit

- globalen (Register-)Variablen (keine lokalen)
- Sprüngen (kein return)
- automatischer Speicherbereinigung

15 CPS-Transformation

CPS-Transformation: Spezifikation
(als Schritt im Compiler)

- Eingabe: Ausdruck X, Ausgabe: Ausdruck Y
- Semantik: Wert von X = Wert von $Y(\lambda v.v)$
- Syntax:
  - $X \in$ Exp (fast) beliebig,

- $Y \in$ Exp/CPS stark eingeschränkt:
  * keine geschachtelten Applikationen
  * Argumente von Applikationen und Operationen $(+, *, >)$ sind Variablen oder Literale

CPS-Transformation: Zielsyntax

drei Teilmengen von `data Exp`:

```
Exp_CPS ==> App Identifier Exp_Value^*
    | If Exp_Value Exp_CPS Exp_CPS
    | Let Identifier Exp_Letable Exp_CPS
Exp_Value ==> Literal | Identifier
Exp_Letable ==> Literal
    | Abs Identifier Exp_CPS
    | Exp_Value Op Exp_Value
```

Übung 1: Übersetze von `Exp` nach `Exp_CPS`:

```
(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
```

Übung 2: wegen CPS brauchen wir tatsächlich:

```
\ k -> k ((0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
```

Beispiel

Lösung 1:

```
(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
==>
let { t.3 = b * b } in
  let { t.2 = 0 - t.3 } in
    let { t.5 = a * c } in
       let { t.4 = 4 * t.5 } in
         let { t.1 = t.2 + t.4 } in
            t.1
```

Lösung 2:

```
\ k -> let  ... in k t.1
```

CPS-Transf. f. Abstraktion, Applikation

vgl. Sect. 6 in: Gordon Plotkin: *Call-by-name, call-by-value and the λ-calculus*, Th. Comp. Sci. 1(2) 1975, 125–159 `http://dx.doi.org/10.1016/0304-3975(75)90017-1` , `http://homepages.inf.ed.ac.uk/gdp/`

- $\mathrm{CPS}(v) = \lambda k.kv$
- $\mathrm{CPS}(FA) = \lambda k.(\mathrm{CPS}(F)(\lambda f.\,\mathrm{CPS}(A)(\lambda a.fak)))$
- $\mathrm{CPS}(\lambda x.B) = \lambda k.k(\lambda x.\,\mathrm{CPS}(B))$

dabei sind k, f, a *frische* Namen.

Bsp. $\mathrm{CPS}(\lambda x.9) = \lambda k_2.k_2(\lambda x.\,\mathrm{CPS}(9)) = \lambda k_2.k_2(\lambda x k_1.k_1 9)$,
$\mathrm{CPS}((\lambda x.9)8) = \lambda k_4.(\lambda k_2.k_2(\lambda x k_1.k_1 9))(\lambda f.((\lambda k_3.k_3 8)(\lambda a.fak_4)))$
Ü: Normalform von $\mathrm{CPS}((\lambda x.9)8)(\lambda z.z)$

Namen

Bei der Übersetzung werden „frische“ Variablennamen benötigt (= die im Eingangsprogramm nicht vorkommen).

```
module Control.Monad.State where
data State s a = State ( s -> ( a, s ) )
get :: State s s ; put :: s -> State ()
evalState :: State s a -> s -> a

fresh :: State Int String
fresh = do k <- get ; put (k+1)
           return $ "f." ++ show k

type Transform a = State Int a
cps :: Exp -> Transform Exp
```

Teilweise Auswertung

- Interpreter (bisher): komplette Auswertung
  (Continuations sind Funktionen, werden angewendet)
- CPS-Transformator (heute): gar keine Auswertung,
  (Continuations sind Ausdrücke)

- gemischter Transformator: benutzt sowohl
  - Continuations als Ausdrücke (der Zielsprache)
  - als auch Continuations als Funktionen (der Gastsprache)

  (compile time evaluation, partial evaluation)

Partial Evaluation

- bisher: Applikation zur Laufzeit
  (Continuation bezeichnet durch `Ref k::Exp`)

  ```
  transform  :: Exp -> Transform ExpCPS
  transform x = case x of
   ConstInteger i -> do
    k<-fresh; return $ Abs k (App (Ref k) x)
  ```

- jetzt: Applikation während der Transformation
  (Continuation bezeichnet durch `k::Cont`)

  ```
  type Cont = ExpValue -> Transform ExpCPS
  transform :: Exp -> (Cont->Transform ExpCPS)
  transform x = case x of
     ConstInteger i -> \ k -> k x
  ```

Umrechnung zw. Continuations (I)

```
id2mc :: Name -> ExpValue -> Transform ExpCPS
id2mc c = \ v-> return $ MultiApp (Ref c) [v]
```

Anwendung bei Abstraktion

```
 Abs x b -> \ k -> do
     c <- fresh "k"
     b' <- cps b ( id2mc c )
     k $ MultiAbs [ x, c ] b' -- Ansatz
```

tatsächlich statt letzter Zeile:

```
     fresh_let (return $ MultiAbs [f,c] b') k
```

mit Hilfsfunktion

```
fresh_let t k  = do
     f <- fresh "l" ; a <- t
     b <- k ( Ref f ) ; return $ Let f a b
```

Umrechnung zw. Continuations (II)

```
mc2exp :: Cont -> Transform ExpCPS
mc2exp k = do
    e <- fresh "e" ; out <- k (Ref e)
    return $ MultiAbs [e] out
```

Anwendung:

```
App f a -> \ k ->
  cps f $ \ f' ->
  cps a $ \ a' -> do -- Ansatz:
    x <- mc2exp k;return $ MultiApp f'[a',x]
```

tatsächlich statt Ansatz:

```
    fresh_let ( mc2exp k ) $ \ x ->
        return $ MultiApp f' [ a', x ]
```

Vergleich CPS-Interpreter/Transformator

Wiederholung CPS-Interpreter:

```
type Cont = Val -> Action Val
eval :: Env -> Exp -> Cont -> Action Val
eval env x = \ k -> case x of
    ConstInt i -> ...
    Plus a b -> ...
```

CPS-Transformator:

```
type Cont = ExpValue -> Transform ExpCPS
cps :: Exp -> Cont -> Transform ExpCPS
cps x = \ m -> case x of
    ConstInt i -> ...
    Plus a b -> ...
```

Übung CPS-Transformation

- Transformationsregeln für Ref, App, Abs, Let nachvollziehen (im Vergleich zu CPS-Interpreter)
- Transformationsregeln für if/then/else, new/put/get hinzufügen
- anwenden auf eine rekursive Funktion (z. B. Fakultät),
  wobei Rekursion durch Zeiger auf Abstraktion realisiert wird

16 Closure Conversion

Motivation

(Literatur: DCPL 17.10) — Beispiel:

```
let { linear = \ a -> \ x -> a * x + 1
    ; f = linear 2 ; g = linear 3
    }
in  f 4 * g 5
```

beachte nicht lokale Variablen: `(\ x -> .. a .. )`

- Semantik-Definition (Interpreter) benutzt Umgebung
- Transformation (closure conversion, environment conversion) (im Compiler) macht Umgebungen explizit.

Spezifikation

closure conversion:

- Eingabe: Programm P
- Ausgabe: äquivalentes Programm P', bei dem alle Abstraktionen *geschlossen* sind
- zusätzlich: P in CPS $\Rightarrow P'$ in CPS

geschlossen: alle Variablen sind lokal

Ansatz:

- Werte der benötigten nicht lokalen Variablen $\Rightarrow$ zusätzliche(s) Argument(e) der Abstraktion
- auch Applikationen entsprechend ändern

closure passing style

- Umgebung = Tupel der Werte der benötigten nicht lokalen Variablen
- Closure = Paar aus Code und Umgebung
  realisiert als Tupel (Code, $\underbrace{W_1, \ldots, W_n}_{\text{Umgebung}}$)

```
\ x -> a * x + 1
==>
\ clo x ->
  let { a = nth clo 1 } in a * x + 1
```

Closure-Konstruktion? Komplette Übersetzung des Beispiels?

Transformation

```
CLC[ \ i_1 .. i_n -> b ] =
   (tuple ( \ clo i_1 .. i_n ->
            let { v_1 = nth 1 clo ; .. }
            in  CLC[b]
          ) v_1 .. )
```

wobei $\{v_1, \ldots\}$ = freie Variablen in $(\lambda i_1 \ldots i_n \to b)$

```
CLC[ (f a_1 .. a_n) ] =
  let { clo = CLC[f]
      ; code = nth 0 clo
  } in  code clo CLC[a_1] .. CLC[a_n]
```

- für alle anderen Fälle: strukturelle Rekursion
- zur Erhaltung der CPS-Form: Spezialfall bei `let`

17 Lifting

Spezifikation

(lambda) lifting:

- Eingabe: Programm P, bei dem alle Abstraktionen geschlossen sind
- Ausgabe: äquivalentes Programm P', bei dem alle Abstraktionen (geschlossen und) global sind

Motivation: in Maschinencode gibt es nur globale Sprungziele
(CPS-Transformation: Unterprogramme kehren nie zurück $\Rightarrow$ globale Sprünge)

Realisierung

nach closure conversion sind alle Abstraktionen geschlossen, diese müssen nur noch aufgesammelt und eindeutig benannt werden.

```
let { g1 = \ v1 .. vn -> b1
    ...
    ; gk = \ v1 .. vn -> bk
} in b
```

dann in `b1, .., bk, b` keine Abstraktionen gestattet

- Zustandsmonade zur Namenserzeugung $(g_1, g_2, \ldots)$
- Ausgabemonade (`WriterT`) zum Aufsammeln
- $g_1, \ldots, g_k$ dürften nun sogar rekursiv sein (sich gegenseitig aufrufen)

Lambda-Lifting (Plan)

um ein Programm zu erhalten, bei dem alle Abstraktionen global sind:

- bisher: closure conversion + lifting:

  (verwendet Tupel)
- Alternative: lambda lifting

  (reiner λ-Kalkül, keine zusätzlichen Datenstrukturen)

Lambda-Lifting (Realisierung)

- verwendet Kombinatoren (globale Funktionen)

  $I = \lambda x.x, S = \lambda xyz.xz(yz), K = \lambda xy.x$
- und Transformationsregeln

  $\text{lift}(FA) = \text{lift}(F)\,\text{lift}(A), \text{lift}(\lambda x.B) = \text{lift}_x(B)$;
- Spezifikation: $\text{lift}_x(B)x \to_\beta^* B$
- Implementierung:

  falls $x \notin \text{FV}(B)$, dann $\text{lift}_x(B) = KB$;

  sonst $\text{lift}_x(x) = I, \text{lift}_x(FA) = S\,\text{lift}_x(F)\,\text{lift}_x(A)$

Beispiel: $\text{lift}(\lambda x.\lambda y.yx) = \text{lift}_x(\text{lift}_y(yx)) = \text{lift}_x(SI(Kx)) = S(K(SI))(S(KK)I)$

18 Registervergabe

Motivation

- (klassische) reale CPU/Rechner hat nur *globalen* Speicher (Register, Hauptspeicher)
- Argumentübergabe (Hauptprogramm $\rightarrow$ Unterprogramm) muß diesen Speicher benutzen

  (Rückgabe brauchen wir nicht wegen CPS)
- Zugriff auf Register schneller als auf Hauptspeicher $\Rightarrow$ bevorzugt Register benutzen.

Plan (I)

- Modell: Rechner mit beliebig vielen Registern $(R_0, R_1, \ldots)$
- Befehle:
  - Literal laden (in Register)
  - Register laden (kopieren)
  - direkt springen (zu literaler Adresse)
  - indirekt springen (zu Adresse in Register)
- Unterprogramm-Argumente in Registern:
  - für Abstraktionen: $(R_0, R_1, \ldots, R_k)$
    (genau diese, genau dieser Reihe nach)
  - für primitive Operationen: beliebig
- Transformation: lokale Namen $\rightarrow$ Registernamen

Plan (II)

- Modell: Rechner mit begrenzt vielen realen Registern,
  z. B. $(R_0, \ldots, R_7)$
- falls diese nicht ausreichen: *register spilling*
  virtuelle Register in Hauptspeicher abbilden
- Hauptspeicher (viel) langsamer als Register:
  möglichst wenig HS-Operationen:
  geeignete Auswahl der Spill-Register nötig

Registerbenutzung

Allgemeine Form der Programme:

```
(let* ((r1 (...))
       (r2 (...))
       (r3 (...)))
       ...
  (r4 ...))
```

für jeden Zeitpunkt ausrechnen: Menge der *freien* Register (= deren aktueller Wert nicht (mehr) benötigt wird)

nächstes Zuweisungsziel ist niedrigstes freies Register (andere Varianten sind denkbar)

vor jedem UP-Aufruf: *register shuffle* (damit die Argumente in $R_0, \ldots, R_k$ stehen)

Compiler-Übungen

(ist gleichzeitig Wiederholung Rekursion)

1. implementiere fehlende Codegenerierung/Runtime für

```
let { p = new 42
    ; f = \ x -> if (x == 0) then 1
                 else  (x * (get p) (x-1))
    ; foo = put p f
    } in f 5
```

2. ergänze das Programm, so daß $5!$ ausgerechnet wird

```
let { f = label x (tuple x 5 1) }
in  if ( 0 == nth 1 f )
    then nth 2 f
    else jump ...
              (tuple ... ... ...)
```

19 Ausblick

Informative Typen

in $X :: T$, der deklarierte Typ T kann eine schärfere Aussage treffen als aus X (Implementierung) ableitbar.

das ist u.a. nützlich bei der Definition und Implementierung von (eingebetteten) domainspezifischen Sprachen

- generalized algebraic data types GADTs
- (parametric) higher order abstract syntax (P)HOAS
- Dependent Types (in Haskell)

Typen für Listen

- das ist klar:

  ```
  data List a = Nil | Cons a (List a)
  Cons False (Cons True Nil) :: List Bool
  ```

- nach welcher Deklaration ist

  ```
  Cons True (Cons "foo" Nil)
  ```

  statisch korrekt?

- Hinweis:

  ```
  data List a b = ...
  ```

Übung: Vollständige Binärbäume

- `data Tree a = Leaf a | Branch (Tree (a,a))`
- deklariere einen Baum `t :: Tree Int` mit 4 Schlüsseln
- implementiere `leaves :: Tree a -> [a]`

GADT

- üblich (algebraischer Datentyp, ADT)

  ```
  data Tree a =
    Leaf a | Branch (Tree a) (Tree a)
  ```

- äquivalente Schreibweise:

```
data Tree a where
  Leaf :: a -> Tree a
  Branch :: Tree a -> Tree a -> Tree a
```

- Verallgemeinerung (generalized ADT)

```
data Exp a where
  ConsInt :: Int -> Exp Int
  Greater :: Exp Int -> Exp Int -> Exp Bool
```

Higher Order Abstract Syntax

```
data Exp a  where
  Var :: a -> Exp a
  Abs :: (a -> Exp b) -> Exp (a -> b)
  App :: Exp (a -> b) -> Exp a -> Exp b

App (Abs $ \x -> Plus (C 1) (Var x)) (C 2)

value :: Exp a -> a
value e = case e of
  App f a -> value f ( value a )
```

Ü: vervollständige Interpreter

Dependent Types (I)

- ```
  {-# language DataKinds #-}
  data Nat = Z | S Nat

  data Vec n a where
     Nil :: Vec Z a
     Cons :: a -> Vec n a -> Vec (S n) a

  Cons False (Cons True Nil) :: Vec (S (S Z)) Bool
  ```

- ```
  type family Plus a b where
    Plus Z b = b ; Plus (S a) b = S (Plus a b)
  ```

  Typ von append, reverse?

Dependent Types (II)

```
{-# OPTIONS_GHC
     -fplugin GHC.TypeLits.Normalise #-}
import GHC.TypeLits

data Vec l a where
  Nil :: Vec 0 a
  Cons :: a -> Vec l a -> Vec (1 + l) a

app :: Vec p a -> Vec q a -> Vec (q + p) a
```

20 Zusammenfassung

Methoden

- Inferenzsysteme
- Lambda-Kalkül
- (algebraischen Datentypen, Pattern Matching, Funktionen höherer Ordnung)
- Monaden

Semantik

- dynamische (Programmausführung)
  - Interpretation
    - funktional, • imperativ (Speicher)
    - Ablaufsteuerung (Continuations)
  - Transformation (Kompilation)
    - CPS transformation
    - closure passing, lifting, • Registerzuweisung
- statische: Typisierung (Programmanalyse)
  - monomorph/polymorph
  - deklariert/rekonstruiert

Monaden zur Programmstrukturierung

```
class Monad m where { return :: a -> m a ;
    (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b }
```

Anwendungen:

- semantische Bereiche f. Interpreter,
- Parser,
- Unifikation

Testfragen (für jede Monad-Instanz):

- Typ (z. B. Action)
- anwendungsspezifische Elemente (z. B. new, put)
- Implementierung der Schnittstelle (return, bind)

Prüfungsvorbereitung

Beispielklausur `http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ws11/cb/klausur/`

- was ist eine Umgebung (`Env`), welche Operationen gehören dazu?
- was ist eine Speicher (`Store`), welche Operationen gehören dazu?
- Gemeinsamkeiten/Unterschiede zw. Env und Store?
- Für $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$: zeichne den Syntaxbaum, bestimme die Menge der freien und die Menge der gebundenen Variablen. Markiere im Syntaxbaum alle Redexe. Gib die Menge der direkten Nachfolger an (einen Beta-Schritt ausführen).
- Definiere Beta-Reduktion und Alpha-Konversion im Lambda-Kalkül. Wozu wird Alpha-Konversion benötigt? (Dafür Beispiel angeben.)
- Wie kann man Records (Paare) durch Funktionen simulieren? (Definiere Lambda-Ausdrücke für `pair, first, second`)
- welche semantischen Bereiche wurden in den Interpretern benutzt? (definieren Sie `Val, Action Val, CPS Val`)

- welches sind die jeweils hinzukommenden Ausdrucksmöglichkeiten der Quellsprache (`Exp`)?
- wie lauten die Monad-Instanzen für `Action, CPS, Parser`, was bedeutet jeweils das bind (>>=)?
- warum benötigt man call-by-name für Abstraktionen über den Programmablauf (warum kann man `if` oder `while` nicht mit call-by-value implementieren)?
- wie kann man call-by-name simulieren in einer call-by-value-Sprache?
- wie kann man call-by-value simulieren in einer call-by-name-Sprache (Antwort: durch CPS-Transformation)
- Definiere Fakultät mittels Fixpunktoperator (Definiere das `f` in `fak = fix f`)
- Bezüglich welcher Halbordnung ist dieses `f` monoton? (Definiere die Ordnung, erläutere Monotonie an einem Beispiel.)
- Wie kann man Rekursion durch get/put simulieren? (Programmbeispiel ergänzen)
- Wie kann man Rekursion durch label/jump simulieren? (Programmbeispiel ergänzen)
- Für die Transformationen CPS, Closure Conv., Lifting, Registervergabe: welche Form haben jeweils Eingabe- und Ausgabeprogramm? Auf welchem Maschinenmodell kann das Zielprogramm ausgeführt werden? (Welche Operationen muß das Laufzeitsystem bereitstellen?)
- Was sind die Bestandteile eines Inferenzsystems (Antwort: Grundbereich, Axiome, Regeln), wie kann man ein Axiom als Spezialfall einer Regel auffassen?
- wie lauten die Inferenzregeln für das Nachschlagen eines Namens in einer Umgebung?
- Inferenzregeln für Applikation, Abstraktion, Let, If/Then/Else im einfach getypten Kalkül
- Geben Sie ein Programm an, das sich nicht einfach (sondern nur polymorph) typisieren läßt. Geben Sie den polymorphen Typ an.
- Inferenz-Regeln für Typ-Applikation, Typ-Abstraktion im polymorphen Kalkül
- für Typ-Rekonstruktion im einfach getypten Kalkül: Welches ist der Grundbereich des Inferenzsystems?

- geben Sie die Inferenzregel für Typrekonstruktion bei If/Then/Else an
- Geben Sie eine Inferenzregel für Typrekonstruktion an, durch die neue Variablen eingeführt werden.
- Wann ist σ ein Unifikator von zwei Termen s, t?
- Geben Sie zwei verschiedene Unifikatoren von $f(a, X)$ und $f(Y, Z)$ an. Einer davon soll streng allgemeiner als der andere sein. Begründen Sie auch diese Beziehung.
- Bestimmen Sie einen Unifikator von $f(X_n, f(X_{n-1}, \ldots, f(X_0, a) \ldots))$ und $f(f(X_{n-1}, X_{n-1}), f(f(X_{n-