

# Compilerbau Vorlesung Wintersemester 2008–11,13,15

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

10. Oktober 2017

– Typeset by FoilTeX –

## Einleitung

– Typeset by FoilTeX –

1

### Beispiel

Eingabe (≈ Java):

```
{ int i;
  float prod;
  float [20] a;
  float [20] b;
  prod = 0;
  i = 1;
  do {
    prod = prod
      + a[i]*b[i];
    i = i+1;
  } while (i <= 20);
}
```

Ausgabe

(Drei-Adress-Code):

```
L1: prod = 0
L3: i = 1
L4: t1 = i * 8
      t2 = a [ t1 ]
      t3 = i * 8
      t4 = b [ t3 ]
      t5 = t2 * t4
      prod = prod + t5
L6: i = i + 1
L5: if i <= 20 goto L4
L2:
```

– Typeset by FoilTeX –

2

### Sprachverarbeitung

- mit Compiler:
  - Quellprogramm → Compiler → Zielprogramm
  - Eingaben → Zielprogramm → Ausgaben
- mit Interpreter:
  - Quellprogramm, Eingaben → Interpreter → Ausgaben
- Mischform:
  - Quellprogramm → Compiler → Zwischenprogramm
  - Zwischenprogramm, Eingaben → virtuelle Maschine → Ausgaben

Gemeinsamkeit: syntaxgesteuerte Semantik (Ausführung bzw. Übersetzung)

– Typeset by FoilTeX –

3

### (weitere) Methoden und Modelle

- lexikalische Analyse: reguläre Ausdrücke, endliche Automaten
- syntaktische Analyse: kontextfreie Grammatiken, Kellerautomaten
- semantische Analyse: Attributgrammatiken
- Code-Erzeugung: bei Registerzuordnung: Graphenfärbung
- Semantik-Definition: Inferenz-Systeme,
- semantische Bereiche als Monaden (Fkt. höherer Ordnung)

– Typeset by FoilTeX –

4

### Inhalt der Vorlesung

Konzepte von Programmiersprachen

- Semantik von einfachen (arithmetischen) Ausdrücken
- lokale Namen, • Unterprogramme (Lambda-Kalkül)
- Zustandsänderungen (imperative Prog.)
- Continuations zur Ablaufsteuerung

realisieren durch

- Interpretation, • Kompilation

Hilfsmittel:

- Theorie: Inferenzsysteme (f. Auswertung, Typisierung)
- Praxis: Haskell, Monaden (f. Auswertung, Parser)

– Typeset by FoilTeX –

5

### Literatur

- Franklyn Turbak, David Gifford, Mark Sheldon: *Design Concepts in Programming Languages*, MIT Press, 2008.  
<http://cs.wellesley.edu/~fturbak/>
- Guy Steele, Gerald Sussman: *Lambda: The Ultimate Imperative*, MIT AI Lab Memo AIM-353, 1976  
(the original 'lambda papers',  
<http://library.readscheme.org/page1.html>)
- Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi and Jeffrey D. Ullman: *Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd edition)* Addison-Wesley, 2007, <http://dragonbook.stanford.edu/>
- J. Waldmann: *Das M-Wort in der Compilerbauvorlesung*, Workshop der GI-Fachgruppe Prog. Spr. und Rechnerkonzepte, 2013 <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/13/fg214/>

– Typeset by FoilTeX –

6

### Anwendungen von Techniken des Compilerbaus

- Implementierung höherer Programmiersprachen
- architekturenspezifische Optimierungen (Parallelisierung, Speicherhierarchien)
- Entwurf neuer Architekturen (RISC, spezielle Hardware)
- Programm-Übersetzungen (Binär-Übersetzer, Hardwaresynthese, Datenbankanfragesprachen)
- Software-Werkzeuge (z.B. Refaktorisierer)

– Typeset by FoilTeX –

7

## Organisation der Vorlesung

- pro Woche eine Vorlesung, eine Übung.
- in Vorlesung, Übung und Hausaufgaben:
  - Theorie,
  - Praxis: Quelltexte (weiter-)schreiben (erst Interpreter, dann Compiler)
- Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten von Übungsaufgaben
- Prüfung: Klausur (120 min, keine Hilfsmittel)

## Beispiel: Interpreter (I)

arithmetische Ausdrücke:

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp | Times Exp Exp
         deriving ( Show )
ex1 :: Exp
ex1 = Times ( Plus ( Const 1 ) ( Const 2 ) )
value :: Exp -> Integer
value x = case x of
  Const i -> i
  Plus x y -> value x + value y
  Times x y -> value x * value y
```

## Beispiel: Interpreter (II)

lokale Variablen und Umgebungen:

```
data Exp = ...
         | Let String Exp Exp | Ref String
ex2 :: Exp
ex2 = Let "x" ( Const 3 )
      ( Times ( Ref "x" ) (Ref "x" ) )
type Env = ( String -> Integer )
value :: Env -> Exp -> Integer
value env x = case x of
  Ref n -> env n
  Let n x b -> value ( \ m ->
    if n == m then value env x else env m ) b
  Const i -> i
  Plus x y -> value env x + value env y
  Times x y -> value env x * value env y
```

## Übung (Haskell)

- Wiederholung Haskell
  - Interpreter/Compiler: `ghci http://haskell.org/`
  - Funktionsaufruf nicht  $f(a, b, c+d)$ , sondern `f a b (c+d)`
  - Konstruktor beginnt mit Großbuchstabe und ist auch eine Funktion
- Wiederholung funktionale Programmierung/Entwurfsmuster
  - rekursiver algebraischer Datentyp (ein Typ, mehrere Konstruktoren)  
(OO: Kompositum, ein Interface, mehrere Klassen)

– rekursive Funktion

- Wiederholung Pattern Matching:
  - beginnt mit `case ... of`, dann Zweige
  - jeder Zweig besteht aus Muster und Folge-Ausdruck
  - falls das Muster paßt, werden die Mustervariablen gebunden und der Folge-Ausdruck ausgewertet

## Übung (Interpreter)

- Benutzung:
  - Beispiel für die Verdeckung von Namen bei geschachtelten `Let`
  - Beispiel dafür, daß der definierte Name während seiner Definition nicht sichtbar ist
- Erweiterung:
  - Verzweigungen mit C-ähnlicher Semantik:  
Bedingung ist arithmetischer Ausdruck, verwende 0 als Falsch und alles andere als Wahr.

```
data Exp = ...
         | If Exp Exp Exp
```

- Quelltext-Archiv: siehe <https://gitlab.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cb-ws15>

## Inferenz-Systeme

### Motivation

- inferieren = ableiten
- Inferenzsystem  $I$ , Objekt  $O$ ,  
Eigenschaft  $I \vdash O$  (in  $I$  gibt es eine Ableitung für  $O$ )
- damit ist  $I$  eine *Spezifikation* einer Menge von Objekten
- man ignoriert die *Implementierung* (= das Finden von Ableitungen)
- Anwendungen im Compilerbau:  
Auswertung von Programmen, Typisierung von Programmen

## Definition

ein *Inferenz-System*  $I$  besteht aus

- Regeln (besteht aus Prämissen, Konklusion)

Schreibweise  $\frac{P_1, \dots, P_n}{K}$

- Axiomen (= Regeln ohne Prämissen)

eine *Ableitung* für  $F$  bzgl.  $I$  ist ein Baum:

- jeder Knoten ist mit einer Formel beschriftet
- jeder Knoten (mit Vorgängern) entspricht Regel von  $I$
- Wurzel (Ziel) ist mit  $F$  beschriftet

Def:  $I \vdash F : \iff \exists I\text{-Ableitungsbaum mit Wurzel } F.$

## Das Ableiten als Hüll-Operation

- für Inferenzsystem  $I$  über Bereich  $O$

und Menge  $M \subseteq O$  definiere

$$M^+ := \{K \mid \frac{P_1, \dots, P_n}{K} \in I, P_1 \in M, \dots, P_n \in M\}.$$

- Übung: beschreibe  $\emptyset^+$ .

- Satz:  $\{F \mid I \vdash F\}$  ist die bzgl.  $\subseteq$  kleinste Menge  $M$  mit  $M^+ \subseteq M$

Bemerkung: „die kleinste“: Existenz? Eindeutigkeit?

- Satz:  $\{F \mid I \vdash F\} = \bigcup_{i \geq 0} M_i$  mit  $M_0 = \emptyset, \forall i : M_{i+1} = M_i^+$

## Regel-Schemata

- um unendliche Menge zu beschreiben, benötigt man unendliche Regelmengen

- diese möchte man endlich notieren

- ein *Regel-Schema* beschreibt eine (mglw. unendliche)

Menge von Regeln, Bsp:  $\frac{(x, y)}{(x - y, y)}$

- Schema wird *instantiiert* durch Belegung der Schema-Variablen

Bsp: Belegung  $x \mapsto 13, y \mapsto 5$

ergibt Regel  $\frac{(13, 5)}{(8, 5)}$

## Inferenz-Systeme (Beispiel 1)

- Grundbereich = Zahlenpaare  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- Axiom:

$$\overline{(13, 5)}$$

- Regel-Schemata:

$$\frac{(x, y)}{(x - y, y)}, \quad \frac{(x, y)}{(x, y - x)}$$

kann man  $(1, 1)$  ableiten?  $(-1, 5)$ ?  $(2, 4)$ ?

## Inferenz-Systeme (Beispiel 2)

- Grundbereich: Zeichenketten aus  $\{0, 1\}^*$

- Axiom:

$$\overline{01}$$

- Regel-Schemata (für jedes  $u, v$ ):

$$\frac{0u, v0}{u1v}, \quad \frac{1u, v1}{u0v}, \quad \frac{u}{\text{reverse}(u)}$$

Leite 11001 ab. Wieviele Wörter der Länge  $k$  sind ableitbar?

## Inferenz-Systeme (Beispiel 3)

- Grundbereich: endliche Folgen von ganzen Zahlen

- Axiome: jede konstante Folge (Bsp.  $[3, 3, 3, 3]$ )

$$\text{– swap}_k: \frac{[\dots, x_k, x_{k+1}, \dots]}{[\dots, x_{k+1} + 1, x_k - 1, \dots]}$$

- Schlussregeln:

$$\text{– rotate: } \frac{[x_1, \dots, x_n]}{[x_2, \dots, x_n, x_1]}$$

Aufgaben: • Ableitungen für  $[5, 3, 1, 3]$ ,  $[7, 7, 1]$

- jede Folge der Form  $[z, 0, \dots, 0]$  ist ableitbar

- Invarianten,  $[5, 3, 3]$  ist nicht ableitbar

praktische Realisierung: <http://www.siteswap.org/> und HTWK-Hochschulsport

## Inferenz von Werten

- Grundbereich: Aussagen der Form  $\text{wert}(p, z)$  mit  $p \in \text{Exp}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp
         | Times Exp Exp
```

- Axiome:  $\text{wert}(\text{Const } z, z)$

- Regeln:

$$\frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Plus } X \ Y, a + b)}, \quad \frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Times } X \ Y, a \cdot b)}, \dots$$

## Umgebungen (Spezifikation)

- Grundbereich: Aussagen der Form  $\text{wert}(E, p, z)$

(in Umgebung  $E$  hat Programm  $p$  den Wert  $z$ )

Umgebungen konstruiert aus  $\emptyset$  und  $E[v := b]$

- Regeln für Operatoren  $\frac{\text{wert}(E, X, a), \text{wert}(E, Y, b)}{\text{wert}(E, \text{Plus } X \ Y, a + b)}, \dots$

- Regeln für Umgebungen

$$\frac{}{\text{wert}(E[v := b], v, b)}, \quad \frac{\text{wert}(E, v', b')}{\text{wert}(E[v := b], v', b')} \text{ für } v \neq v'$$

- Regeln für Bindung:  $\frac{\text{wert}(E, X, b), \text{wert}(E[v := b], Y, c)}{\text{wert}(E, \text{let } v = X \ \text{in } Y, c)}$

## Umgebungen (Implementierung)

Umgebung ist (partielle) Funktion von Name nach Wert

Realisierungen: `type Env = String -> Integer`

Operationen:

- `empty :: Env` leere Umgebung
- `lookup :: Env -> String -> Integer`  
Notation:  $e(x)$
- `extend :: Env -> String -> Integer -> Env`  
Notation:  $e[v := z]$

Beispiel

`lookup (extend (extend empty "x" 3) "y" 4) "x"`  
entspricht  $(\emptyset[x := 3][y := 4])x$

## Aussagenlogische Resolution

Formel  $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee D)$  in konjunktiver Normalform dargestellt als  $\{\{A, \neg B, \neg C\}, \{C, D\}\}$

(Formel = Menge von Klauseln, Klausel = Menge von Literalen, Literal = Variable oder negierte Variable)

folgendes Inferenzsystem heißt *Resolution*:

- Axiome: Klauselmenge einer Formel,
- Regel:
  - Prämissen: Klauseln  $K_1, K_2$  mit  $v \in K_1, \neg v \in K_2$
  - Konklusion:  $(K_1 \setminus \{v\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg v\})$

Eigenschaft (Korrektheit): wenn  $\frac{K_1, K_2}{K}$ , dann  $K_1 \wedge K_2 \rightarrow K$ .

## Resolution (Vollständigkeit)

die Formel (Klauselmenge) ist nicht erfüllbar  $\iff$  die leere Klausel ist durch Resolution ableitbar.

Bsp:  $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$

Beweispläne:

- $\Rightarrow$ : Gegeben ist die nicht erfüllbare Formel. Gesucht ist eine Ableitung für die leere Klausel. Methode: Induktion nach Anzahl der in der Formel vorkommenden Variablen.
- $\Leftarrow$ : Gegeben ist die Ableitung der leeren Klausel. Zu zeigen ist die Nichterfüllbarkeit der Formel. Methode: Induktion nach Höhe des Ableitungsbaumes.

## Die Abtrennungsregel (modus ponens)

... ist das Regelschema  $\frac{P \rightarrow Q, P}{Q}$ ,

Der *Hilbert-Kalkül* für die Aussagenlogik ist das Inferenz-System mit modus ponens und Axiom-Schemata wie z. B.

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

(es gibt verschiedene Varianten des Kalküls) — Man zeigt:

- Korrektheit: jede ableitbare Aussage ist allgemeingültig
- Vollständigkeit: jede allgemeine Aussage ist ableitbar

## Semantische Bereiche

bisher: Wert eines Ausdrucks ist Zahl.

jetzt erweitern (Motivation: if-then-else mit richtigem Typ):

```
data Val = ValInt Int
         | ValBool Bool
```

Dann brauchen wir auch

- `data Val = ... | ValErr String`
- vernünftige Notation (Kombinatoren) zur Einsparung von Fallunterscheidungen bei Verkettung von Rechnungen

```
with_int :: Val -> (Int -> Val) -> Val
```

## Continuations

Programmablauf-Abstraktion durch Continuations:

Definition:

```
with_int :: Val -> (Int -> Val) -> Val
with_int v k = case v of
```

```
  ValInt i -> k i
  _ -> ValErr "expected ValInt"
```

Benutzung:

```
value env x = case x of
  Plus l r ->
    with_int (value env l) $ \ i ->
      with_int (value env r) $ \ j ->
        ValInt (i + j)
```

Aufgaben: if/then/else mit `with_bool`, relationale Operatoren (`==`, `<`, o.ä.), Boolesche Konstanten.

## Unterprogramme

### Beispiele

- in verschiedenen Prog.-Sprachen gibt es verschiedene Formen von Unterprogrammen:  
Prozedur, sog. Funktion, Methode, Operator, Delegate, anonymes Unterprogramm
- allgemeinstes Modell: Kalkül der anonymen Funktionen (Lambda-Kalkül),

## Interpreter mit Funktionen

abstrakte Syntax:

```
data Exp = ...
         | Abs { formal :: Name , body :: Exp }
         | App { rator :: Exp , rand :: Exp }
```

konkrete Syntax:

```
let { f = \ x -> x * x } in f (f 3)
```

konkrete Syntax (Alternative):

```
let { f x = x * x } in f (f 3)
```

## Semantik

erweitere den Bereich der Werte:

```
data Val = ... | ValFun ( Value -> Value )
```

erweitere Interpreter:

```
value :: Env -> Exp -> Val
```

```
value env x = case x of
```

```
...
```

```
  Abs { } ->
```

```
  App { } ->
```

mit Hilfsfunktion

```
with_fun :: Val -> ...
```

## Testfall (1)

```
let { x = 4 }
in let { f = \ y -> x * y }
    in let { x = 5 }
        in f x
```

## Let und Lambda

- `let { x = A } in Q`

kann übersetzt werden in

```
(\ x -> Q) A
```

- `let { x = a , y = b } in Q`

wird übersetzt in ...

- beachte: das ist nicht das `let` aus Haskell

## Mehrstellige Funktionen

... simulieren durch einstellige:

- mehrstellige Abstraktion:

```
\ x y z -> B := \x -> (\y -> (\z -> B ))
```

- mehrstellige Applikation:

```
f P Q R := ((f P) Q) R
```

(die Applikation ist links-assoziativ)

- der Typ einer mehrstelligen Funktion:

```
T1 -> T2 -> T3 -> T4 :=
T1 -> (T2 -> (T3 -> T4))
```

(der Typ-Pfeil ist rechts-assoziativ)

## Closures (I)

bisher:

```
eval env x = case x of ...
```

```
  Abs n b -> ValFun $ \ v ->
```

```
    eval (extend env n v) b
```

```
  App f a ->
```

```
    with_fun ( eval env f ) $ \ g ->
```

```
    with_val ( eval env a ) $ \ v -> g v
```

alternativ: die Umgebung von `Abs` in die Zukunft transportieren:

```
eval env x = case x of ...
```

```
  Abs n b -> ValClos env n b
```

```
  App f a -> ...
```

## Closures (II)

Spezifikation der Semantik durch Inferenz-System:

- Closure konstruieren:

$$\frac{}{\text{wert}(E, \lambda n.b, \text{Clos}(E, n, b))}$$

- Closure benutzen:

$$\frac{\text{wert}(E_1, f, \text{Clos}(E_2, n, b)), \text{wert}(E_1, a, w), \text{wert}(E_2[n := w], b, r)}{\text{wert}(E_1, fa, r)}$$

## Rekursion?

- Das geht nicht, und soll auch nicht gehen:

```
let { x = 1 + x } in x
```

- aber das hätten wir doch gern:

```
let { f = \ x -> if x > 0
          then x * f (x -1) else 1
      } in f 5
```

(nächste Woche)

- aber auch mit nicht rekursiven Funktionen kann man interessante Programme schreiben:

## Testfall (2)

```
let { t f x = f (f x) }
in let { s x = x + 1 }
    in t t t t s 0
```

- auf dem Papier den Wert bestimmen
- mit Haskell ausrechnen
- mit selbstgebautem Interpreter ausrechnen

## Lambda-Kalkül

### Motivation

- intensionale Modellierung von Funktionen,
  - intensional: Fkt. ist Berechnungsvorschrift, Programm
  - (extensional: Fkt. ist Menge v. geordneten Paaren)
- Notation mit gebundenen (lokalen) Variablen, wie in
  - Analysis:  $\int x^2 dx, \sum_{k=0}^n k^2$
  - Logik:  $\forall x \in A : \forall y \in B : P(x, y)$
  - Programmierung:  
`static int foo (int x) { ... }`

## Der Lambda-Kalkül

(Alonzo Church, 1936 ... Henk Barendregt, 1984 ... )  
ist der Kalkül für Funktionen mit benannten Variablen  
die wesentliche Operation ist das Anwenden einer  
Funktion:

$$(\lambda x. B)A \rightarrow B[x := A]$$

Beispiel:  $(\lambda x. x * x)(3 + 2) \rightarrow (3 + 2) * (3 + 2)$

Im reinen Lambda-Kalkül gibt es *nur* Funktionen—keine  
Zahlen

## Lambda-Terme

Menge  $\Lambda$  der Lambda-Terme (mit Variablen aus einer  
Menge  $V$ ):

- (Variable) wenn  $x \in V$ , dann  $x \in \Lambda$
- (Applikation) wenn  $F \in \Lambda, A \in \Lambda$ , dann  $(FA) \in \Lambda$
- (Abstraktion) wenn  $x \in V, B \in \Lambda$ , dann  $(\lambda x. B) \in \Lambda$

das sind also Lambda-Terme:

$x, (\lambda x. x), ((xz)(yz)), (\lambda x. (\lambda y. (\lambda z. ((xz)(yz))))$

## verkürzte Notation

- Applikation als links-assoziativ auffassen:

$$(\dots ((FA_1)A_2) \dots A_n) \sim FA_1A_2 \dots A_n$$

Beispiel:  $((xz)(yz)) \sim xz(yz)$

- geschachtelte Abstraktionen unter ein Lambda schreiben:

$$\lambda x_1. (\lambda x_2. \dots (\lambda x_n. B) \dots) \sim \lambda x_1 x_2 \dots x_n. B$$

Beispiel:  $\lambda x. \lambda y. \lambda z. B \sim \lambda x y z. B$

- die vorigen Abkürzungen sind sinnvoll, denn  
 $(\lambda x_1 \dots x_n. B)A_1 \dots A_n$  verhält sich wie eine Anwendung  
einer mehrstelligen Funktion.

## Gebundene Variablen

Def: Menge  $FV(t)$  der *freien Variablen* von  $t \in \Lambda$

- $FV(x) = \{x\}$
- $FV(FA) = FV(F) \cup FV(A)$
- $FV(\lambda x. B) = FV(B) \setminus \{x\}$

Def: Menge  $BV(t)$  der *gebundenen Variablen* von  $t \in \Lambda$

- $BV(x) = \emptyset$
- 
- 

## Substitution

$A[x := N]$  ist (eine Kopie von)  $A$ , wobei jedes freie  
Vorkommen von  $x$  durch  $N$  ersetzt ist. . .

. . . und keine in  $N$  frei vorkommende Variable hierdurch  
gebunden wird

Definition durch strukturelle Induktion

- $A$  ist Variable (2 Fälle)
- $A$  ist Applikation
- $A$  ist Abstraktion
  - $(\lambda x. B)[x := N] = \lambda x. B$
  - $(\lambda y. B)[x := N] = \lambda y. (B[x := N])$ ,  
falls  $x \neq y$  und  $BV(\lambda y. B) \cap FV(N) = \emptyset$

„falls. . .“ hat zur Folge: Substitution ist *partielle* Fkt.

## Das falsche Binden von Variablen

Diese Programme sind *nicht* äquivalent:

```
int f (int y) {
  int x = y + 3; int sum = 0;
  for (int y = 0; y < 4; y++)
    { sum = sum + x ; }
  return sum;
}

int g (int y) {
  int sum = 0;
  for (int y = 0; y < 4; y++)
    { sum = sum + (y+3); }
  return sum;
}
```

## Gebundene Umbenennungen

Relation  $\rightarrow_\alpha$  auf  $\Lambda$ :

- Axiom:  $(\lambda x. B) \rightarrow_\alpha (\lambda y. B[x := y])$  falls  $y \notin V(B)$ .

und Substitution erlaubt

- Abschluß unter Kontext:

$$\frac{F \rightarrow_\alpha F'}{(FA) \rightarrow_\alpha (F'A)}, \quad \frac{A \rightarrow_\alpha A'}{(FA) \rightarrow_\alpha (FA')}, \quad \frac{B \rightarrow_\alpha B'}{\lambda x. B \rightarrow_\alpha \lambda x. B'}$$

$\equiv_\alpha$  ist die durch  $\rightarrow_\alpha$  definierte Äquivalenzrelation  
(die transitive, reflexive und symmetrische Hülle von  $\rightarrow_\alpha$ )

Bsp.  $\lambda x. \lambda x. x \equiv_\alpha \lambda y. \lambda x. x, \lambda x. \lambda x. x \not\equiv_\alpha \lambda y. \lambda x. y$

## $\alpha$ -Äquivalenzklassen

wir wollen bei Bedarf gebunden umbenennen, aber das nicht immer explizit hinschreiben: betrachten  $\Lambda / \equiv_\alpha$  statt  $\Lambda$   
Wdhlg (1. Sem) wenn  $R$  eine Äquivalenz-Relation auf  $M$ ,

- dann  $[x]_R$  (die  $R$ -Äquivalenzklasse von  $x$ )  
 $[x]_R := \{y \mid R(x, y)\}$ .
- $M/R$  (die Menge der  $R$ -Klassen von  $M$ )  
 $M/R := \{[x]_R \mid x \in M\}$ .

Beispiele:

- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}^2/R$  mit  $R((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \dots$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/R$  mit  $\dots$
- Nerode-Kongruenz einer formalen Sprache

## Ableitungen

Absicht: Relation  $\rightarrow_\beta$  auf  $\Lambda / \equiv_\alpha$  (Ein-Schritt-Ersetzung):

- Axiom:  $(\lambda x. B)A \rightarrow_\beta B[x := A]$   
ein Term der Form  $(\lambda x. B)A$  heißt *Redex* (= reducible expression)

- Abschluß unter Kontext:

$$\frac{F \rightarrow_\beta F'}{(FA) \rightarrow_\beta (F'A)}, \quad \frac{A \rightarrow_\beta A'}{(FA) \rightarrow_\beta (FA')}, \quad \frac{B \rightarrow_\beta B'}{\lambda x. B \rightarrow_\beta \lambda x. B'}$$

Vorsicht:

$$(\lambda x. (\lambda y. x y x))(y y) \rightarrow_\beta (\lambda y. y x)[x := (y y)] \stackrel{?}{=} \lambda y. y(y y)$$

das freie  $y$  wird fälschlich gebunden

die Substitution ist nicht ausführbar, man muß vorher lokal umbenennen

## Eigenschaften der Reduktion

$\rightarrow$  auf  $\Lambda$  ist

- konfluent

$$\forall A, B, C \in \Lambda : A \rightarrow_\beta^* B \wedge A \rightarrow_\beta^* C \Rightarrow \exists D \in \Lambda : B \rightarrow_\beta^* D \wedge C \rightarrow_\beta^* D$$

- (Folgerung: jeder Term hat höchstens eine Normalform)
- aber nicht terminierend (es gibt Terme mit unendlichen Ableitungen)

$$W = \lambda x. x x, \Omega = W W.$$

- es gibt Terme mit Normalform und unendlichen Ableitungen,  $K I \Omega$  mit  $K = \lambda x y. x, I = \lambda x. x$

## Daten als Funktionen

Simulation von Daten (Tupel)  
durch Funktionen (Lambda-Ausdrücke):

- Konstruktor:  $\langle D_1, \dots, D_k \rangle \Rightarrow \lambda s. s D_1 \dots D_k$

- Selektoren:  $s_i \Rightarrow \lambda t. t(\lambda d_1 \dots d_k. d_i)$

dann gilt  $s_i \langle D_1, \dots, D_k \rangle \rightarrow_\beta^* D_i$

Anwendungen:

- Auflösung simultaner Rekursion
- Modellierung von Zahlen

## Lambda-Kalkül als universelles Modell

- Wahrheitswerte:

$$\text{True} = \lambda x y. x, \text{False} = \lambda x y. y$$

(damit läßt sich if-then-else leicht aufschreiben)

- natürliche Zahlen:

$$0 = \lambda x. x; (n + 1) = \langle \text{False}, n \rangle$$

(damit kann man leicht  $x > 0$  testen)

- Rekursion?

## Fixpunkt-Kombinatoren

- Definition:  $\Theta = (\lambda x y. (y(x y)))(\lambda x y. (y(x y)))$

- Satz:  $\Theta f \rightarrow_\beta^* f(\Theta f)$ , d. h.  $\Theta f$  ist Fixpunkt von  $f$

- d. h.  $\Theta$  ist *Fixpunkt-Kombinator*, (T wegen Turing)

- Folgerung: im Lambda-Kalkül kann man beliebige Wiederholung (Schachtelung) von Rechnungen beschreiben

Anwendung:

$$f = \backslash g x \rightarrow \text{if } x == 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * g(x-1)$$

Beispiel:  $f(\lambda z. z)7 = 7 \cdot (\lambda z. z)6 = 7 \cdot 6, f(\lambda z. z)0 = 1;$

$$\Theta f 7 \rightarrow_\beta^* 7 \cdot (f(\Theta f)6) \rightarrow_\beta^* 7 \cdot (6 \cdot (f(\Theta f)5)) \rightarrow_\beta^* \dots$$

## Lambda-Berechenbarkeit

Satz: (Church, Turing)

Menge der Turing-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Wörter auf Band)

Alan Turing: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, Proc. LMS, 2 (1937) 42 (1) 230–265

<https://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230>

= Menge der Lambda-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Lambda-Ausdrücke)

Alonzo Church: A Note on the Entscheidungsproblem, J. Symbolic Logic 1 (1936) 1, 40–41

= Menge der while-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Registerinhalte)

## Übung Lambda-Kalkül

- Konstruktor und Selektoren für Paare
- Test, ob der Nachfolger von 0 gleich 0 ist  
(mit  $\lambda$ -kodierten Zahlen)
- Fakultät mittels  $\Theta$   
(mit „echten“ Zahlen und Operationen)

folgende Aufgaben aus Barendregt: Lambda Calculus, 1984:

- (Aufg. 6.8.2) Konstruiere  $K^\infty \in \Lambda^0$  (ohne freie Variablen) mit  $K^\infty x = K^\infty$  (hier und in im folgenden hat = die Bedeutung  $\equiv_\beta$ )

Konstruiere  $A \in \Lambda^0$  mit  $Ax = xA$

- beweise den Doppelfixpunktsatz (Kap. 6.5)

$\forall F, G : \exists A, B : A = FAB \wedge B = GAB$

- (Aufg. 6.8.14, J.W.Klop)

$X = \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.$

$r(\text{thisisa fixedpointcombinator})$

$Y = X^{27} = \underbrace{X \dots X}_{27}$

Zeige, daß  $Y$  ein Fixpunktkombinator ist.

## Fixpunkte

### Motivation

Das ging bisher gar nicht:

```
let { f = \ x -> if x > 0
      then x * f (x - 1) else 1
    } in f 5
```

Lösung 1: benutze Fixpunktkombinator

```
let { Theta = ... } in
let { f = Theta ( \ g -> \ x -> if x > 0
                  then x * g (x - 1) else 1 )
    } in f 5
```

Lösung 2 (später): realisiere Fixpunktberechnung im Interpreter (neuer AST-Knotentyp)

### Existenz von Fixpunkten

Fixpunkt von  $f :: C \rightarrow C$  ist  $x :: C$  mit  $fx = x$ .

Existenz? Eindeutigkeit? Konstruktion?

Satz: Wenn  $C$  pointed CPO und  $f$  stetig, dann besitzt  $f$  genau einen kleinsten Fixpunkt.

- CPO = complete partial order = vollständige Halbordnung
- complete = jede monotone Folge besitzt Supremum (= kleinste obere Schranke)
- pointed:  $C$  hat kleinstes Element  $\perp$

### Beispiele f. Halbordnungen, CPOs

Halbordnung? pointed? complete?

- $\leq$  auf  $\mathbb{N}$
- $\leq$  auf  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- $\leq$  auf  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$
- $\leq$  auf  $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1\}$
- Teilbarkeit auf  $\mathbb{N}$
- Präfix-Relation auf  $\Sigma^*$
- $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \mid (x_1 \leq x_2) \vee (y_1 \leq y_2)\}$  auf  $\mathbb{R}^2$
- $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \mid (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)\}$  auf  $\mathbb{R}^2$
- identische Relation  $\text{id}_M$  auf einer beliebigen Menge  $M$
- $\{(\perp, x) \mid x \in M_\perp\} \cup \text{id}_M$  auf  $M_\perp := \{\perp\} \cup M$

### Stetige Funktionen

$f$  ist stetig :=

- $f$  ist monoton:  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- und für monotone Folgen  $[x_0, x_1, \dots]$  gilt:  
 $f(\text{sup}[x_0, x_1, \dots]) = \text{sup}[f(x_0), f(x_1), \dots]$

Beispiele: in  $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \leq)$

- $x \mapsto 42$  ist stetig
- $x \mapsto \text{if } x < +\infty \text{ then } x + 1 \text{ else } +\infty$
- $x \mapsto \text{if } x < +\infty \text{ then } 42 \text{ else } +\infty$

Satz: Wenn  $C$  pointed CPO und  $f : C \rightarrow C$  stetig, dann besitzt  $f$  genau einen kleinsten Fixpunkt ...  
... und dieser ist  $\text{sup}[\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots]$

### Funktionen als CPO

- Menge der partiellen Funktionen von  $B$  nach  $B$ :

$C = (B \leftrightarrow B)$

- partielle Funktion  $f : B \leftrightarrow B$   
entspricht totaler Funktion  $f : B \rightarrow B_\perp$
- $C$  geordnet durch  $f \leq g \iff \forall x \in B : f(x) \leq g(x)$ ,  
wobei  $\leq$  die vorhin definierte CPO auf  $B_\perp$
- $f \leq g$  bedeutet:  $g$  ist Verfeinerung von  $f$
- Das Bottom-Element von  $C$  ist die überall undefinierte Funktion. (diese heißt auch  $\perp$ )

### Funktionen als CPO, Beispiel

der Operator  $F =$

```
\ g -> ( \ x -> if (x==0) then 0
              else 2 + g (x - 1) )
```

ist stetig auf  $(\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N})$  (Beispiele nachrechnen!)

Iterative Berechnung des Fixpunktes:

$\perp = \emptyset$  überall undefiniert  
 $F\perp = \{(0, 0)\}$  sonst  $\perp$   
 $F(F\perp) = \{(0, 0), (1, 2)\}$  sonst  $\perp$   
 $F^3\perp = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$  sonst  $\perp$

### Fixpunktberechnung im Interpreter

Erweiterung der abstrakten Syntax:

```
data Exp = ... | Rec Name Exp
```

Beispiel

```
App
  (Rec g (Abs v (if v==0 then 0 else 2 + g(v-1))))
  5
```

Bedeutung:  $\text{Rec } x \ B$  bezeichnet den Fixpunkt von  $(\lambda x.B)$

Definition der Semantik:

```
value (E, (\x.B) (Rec x B), v)
```

```
value (E, Rec x B, v)
```

## Fixpunkte und Laziness

Fixpunkte existieren in pointed CPOs.

- Zahlen: nicht pointed  
(arithmetische Operatoren sind strikt)
- Funktionen: partiell  $\Rightarrow$  pointed  
( $\perp$  ist überall undefinierte Funktion)
- Daten (Listen, Bäume usw.): pointed:  
(Konstruktoren sind nicht strikt)

Beispiele in Haskell:

```
fix f = f (fix f)
xs = fix $ \ zs -> 1 : zs
ys = fix $ \ zs ->
    0 : 1 : zipWith (+) zs (tail zs)
```

## Simultane Rekursion: letrec

Beispiel (aus: D. Hofstadter, Gödel Escher Bach)

```
letrec { f = \ x -> if x == 0 then 1
          else x - g(f(x-1))
        , g = \ x -> if x == 0 then 0
          else x - f(g(x-1))
      } in f 15
```

Bastelaufgabe: für welche  $x$  gilt  $f(x) \neq g(x)$ ?

weitere Beispiele:

```
letrec { x = 3 + 4 , y = x * x } in x - y
letrec { f = \ x -> .. f (x-1) } in f 3
```

## letrec nach rec

mittels der Lambda-Ausdrücke für select und tuple

```
LetRec [(n1,x1), .. (nk,xk)] y
=> ( rec t
    ( let n1 = select1 t
        ...
        nk = selectk t
        in tuple x1 .. xk ) )
( \ n1 .. nk -> y )
```

## Übung Fixpunkte

- Limes der Folge  $F^k(\perp)$  für

```
F h = \ x -> if x > 23 then x - 11
          else h (h (x + 14))
```

- Ist  $F$  stetig? Gib den kleinsten Fixpunkt von  $F$  an:

```
F h = \ x -> if x >= 2 then 1 + h(x-2)
          else if x == 1 then 1 else h(4) - 2
```

Hat  $F$  weitere Fixpunkte?

- $C$  = Menge der Formalen Sprachen über  $\Sigma$ ,  
halbgeordnet durch  $\subseteq$ . ist CPO? pointed?

$h : C \rightarrow C : L \mapsto \{\epsilon\} \cup L \cdot \{ab\}$  ist stetig?

Fixpunkt(e) von  $h$ ?

## Zustand/Speicher

### Motivation

bisherige Programme sind nebenwirkungsfrei, das ist nicht immer erwünscht:

- direktes Rechnen auf von-Neumann-Maschine:  
Änderungen im Hauptspeicher
- direkte Modellierung von Prozessen mit  
Zustandsänderungen ((endl.) Automaten)

Dazu muß semantischer Bereich geändert werden.

- bisher:  $\text{Val}$ , jetzt:  $\text{State} \rightarrow (\text{State}, \text{Val})$   
(dabei ist  $(A, B)$  die Notation für  $A \times B$ )

Semantik von (Teil-)Programmen ist Zustandsänderung.

## Speicher

```
import qualified Data.Map as M
http://hackage.haskell.org/packages/archive/
containers/0.5.0.0/doc/html/Data-Map-Lazy.html
newtype Addr = Addr Int
type Store = M.Map Addr Val
newtype Action a =
    Action ( Store -> ( Store, a ) )
```

spezifische Aktionen:

```
new :: Val -> Action Addr
get :: Addr -> Action Val
put :: Addr -> Val -> Action ()
```

Aktion ausführen, Resultat liefern:

```
run :: Store -> Action a -> a
```

## Auswertung von Ausdrücken

Ausdrücke (mit Nebenwirkungen):

```
data Exp = ...
    | New Exp | Get Exp | Put Exp Exp
```

Resultattyp des Interpreters ändern:

```
value    :: Env -> Exp -> Val
evaluate :: Env -> Exp -> Action Val
```

semantischen Bereich erweitern:

```
data Val = ...
    | ValAddr Addr
    | ValFun ( Val -> Action Val )
```

Aufruf des Interpreters:

```
run Store.empty $ evaluate undefined $ ...
```

## Änderung der Hilfsfunktionen

bisher:

```
with_int :: Val -> ( Int -> Val ) -> Val
with_int v k = case v of
    ValInt i -> k i
    v -> ValErr "ValInt expected"
```

jetzt:

```
with_int :: Action Val
    -> ( Int -> Action Val ) -> Action Val
with_int m k = m >>= \ v -> case v of ...
```

Hauptprogramm muß kaum geändert werden (!)

## Speicher-Aktionen als Monade

generische Aktionen/Verknüpfungen:

- nichts tun (return), • nacheinander (bind, >>=)

```
class Monad m where
  return :: a -> m a
  (>>=) :: m a
        -> (a -> m b) -- Continuation
        -> m b
instance Monad Action where
  return x = Action $ \ s -> ( s, x )
  Action a >>= f = Action $ \ s -> ...
```

## Variablen?

in unserem Modell haben wir:

- veränderliche Speicherstellen,
  - aber immer noch unveränderliche „Variablen“ (lokale Namen)
- ⇒ der Wert eines Namens kann eine Speicherstelle sein, aber dann immer dieselbe.

## Imperative Programmierung

es fehlen noch wesentliche Operatoren:

- Nacheinanderausführung (Sequenz)
- Wiederholung (Schleife)

diese kann man:

- simulieren (durch let)
- als neue AST-Knoten realisieren (Übung)

## Rekursion

mehrere Möglichkeiten zur Realisierung

- mit Fixpunkt-Kombinator (bekannt)
- in der Gastsprache des Interpreters (dabei neu: Fixpunkte von Aktionen)
- (neu:) simulieren (in der interpretierten Sprache) durch Benutzung des Speichers

## Rekursion (semantisch)

bisher:

```
fix :: ( a -> a ) -> a
fix f = f ( fix f )
```

jetzt:

```
import Control.Monad.Fix
class MonadFix m where
  mfix :: ( a -> m a ) -> m a
instance MonadFix Action where
mfix f = Action $ \ s0 ->
  let Action a = f v
      ( s1, v ) = a s0
  in ( s1, v )
```

## Rekursion (operational)

Idee: eine Speicherstelle anlegen und als Vorwärtsreferenz auf das Resultat der Rekursion benutzen

```
Rec n (Abs x b) ==>
  a := new 42
  put a ( \ x -> let { n = get a } in b )
  get a
```

## Speicher—Übung

Fakultät imperativ:

```
let { fak = \ n ->
  { a := new 1 ;
    while ( n > 0 )
      { a := a * n ; n := n - 1 ; }
    return a ;
  }
} in fak 5
```

1. Schleife durch Rekursion ersetzen und Sequenz durch let:

```
fak = let { a = new 1 }
      in Rec f ( \ n -> ... )
```

2. Syntaxbaumtyp erweitern um Knoten für Sequenz und Schleife

## Monaden

### ... unter verschiedenen Aspekten

- unsere Motivation: semantischer Bereich, `return :: a -> m a` als leere Aktion, Operator `(>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b` zum Verknüpfen von Aktionen
- auch nützlich: `do`-Notation (anstatt Ketten von `>>=`)
- die Wahrheit: *a monad in X is just a monoid in the category of endofunctors of X*
- die ganze Wahrheit:  
Functor `m => Applicative m => Monad m`
- weitere Anwendungen: IO, Parser-Kombinatoren

## Die Konstruktorklasse Monad

Definition:

```
class Monad m where
```

```
    return :: a -> m a
```

```
    ( >>= ) :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

Benutzung der Methoden:

```
evaluate e l >>= \ a ->
```

```
evaluate e r >>= \ b ->
```

```
return ( a + b )
```

## Do-Notation für Monaden

```
evaluate e l >>= \ a ->
    evaluate e r >>= \ b ->
        return ( a + b )
```

do-Notation (explizit geklammert):

```
do { a <- evaluate e l
    ; b <- evaluate e r
    ; return ( a + b )
    }
```

do-Notation (implizit geklammert):

```
do a <- evaluate e l
    b <- evaluate e r
    return ( a + b )
```

Haskell: implizite Klammerung nach `let`, `do`, `case`, `where`

## Beispiele für Monaden

- Aktionen mit Speicheränderung (vorige Woche)

```
Action (Store -> (Store, a))
```

- Aktionen mit Welt-Änderung: `IO a`

- Transaktionen (Software Transactional Memory) `STM a`

- Aktionen, die möglicherweise fehlschlagen:

```
data Maybe a = Nothing | Just a
```

- Nichtdeterminismus (eine Liste von Resultaten): `[a]`

- Parser-Monade (nächste Woche)

## Die IO-Monade

```
data IO a -- abstract
instance Monad IO -- eingebaut
```

```
readFile :: FilePath -> IO String
```

```
putStrLn :: String -> IO ()
```

Alle „Funktionen“, deren Resultat von der Außenwelt (Systemzustand) abhängt, haben Resultattyp `IO ...`, sie sind tatsächlich *Aktionen*.

Am Typ einer Funktion erkennt man ihre möglichen Wirkungen bzw. deren garantierte Abwesenheit.

```
main :: IO ()
```

```
main = do
    cs <- readFile "foo.bar" ; putStrLn cs
```

## Grundlagen: Kategorien

- *Kategorie C* hat Objekte  $\text{Obj}_C$  und Morphismen  $\text{Mor}_C$ , jeder Morphismus  $m$  hat als Start ( $S$ ) und Ziel ( $T$ ) ein Objekt, Schreibweise:  $m : S \rightarrow T$  oder  $m \in \text{Mor}_C(S, T)$
- für jedes  $O \in \text{Obj}_C$  gibt es  $\text{id}_O : O \rightarrow O$
- für  $f : S \rightarrow M$  und  $g : M \rightarrow T$  gibt es  $f \circ g : S \rightarrow T$ . es gilt immer  $f \circ \text{id} = f$ ,  $\text{id} \circ g = g$ ,  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Beispiele:

- Set:  $\text{Obj}_{\text{Set}} = \text{Mengen}$ ,  $\text{Mor}_{\text{Set}} = \text{totale Funktionen}$
- Grp:  $\text{Obj}_{\text{Grp}} = \text{Gruppen}$ ,  $\text{Mor}_{\text{Set}} = \text{Homomorphismen}$
- für jede Halbordnung  $(M, \leq)$ :  $\text{Obj} = M$ ,  $\text{Mor} = (\leq)$
- Hask:  $\text{Obj}_{\text{Hask}} = \text{Typen}$ ,  $\text{Mor}_{\text{Hask}} = \text{Funktionen}$

## Kategorische Definitionen

Beispiel: Isomorphie

- eigentlich: Abbildung, die die Struktur (der abgebildeten Objekte) erhält
- Struktur von  $O \in \text{Obj}(C)$  ist aber unsichtbar
- Eigenschaften von Objekten werden beschrieben durch Eigenschaften ihrer Morphismen (vgl. abstrakter Datentyp, API)  
Bsp:  $f : A \rightarrow B$  ist *Isomorphie* (kurz: ist iso), falls es ein  $g : B \rightarrow A$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_A \wedge g \circ f = \text{id}_B$

weiteres Beispiel

- $m : a \rightarrow b$  monomorph:  $\forall f, g : f \circ m = g \circ m \Rightarrow f = g$

## Produkte

- Def:  $P$  ist *Produkt* von  $A_1$  und  $A_2$  mit Projektionen  $\text{proj}_1 : P \rightarrow A_1$ ,  $\text{proj}_2 : P \rightarrow A_2$ , wenn für jedes  $B$  und Morphismen  $f_1 : B \rightarrow A_1$ ,  $f_2 : B \rightarrow A_2$  es existiert genau ein  $g : B \rightarrow P$  mit  $g \circ \text{proj}_1 = f_1$  und  $g \circ \text{proj}_2 = f_2$
- für Set ist das wirklich das Kreuzprodukt
- für die Kategorie einer Halbordnung?
- für Gruppen? (Beispiel?)

## Dualität

- Wenn ein Begriff kategorisch definiert ist, erhält man den dazu *dualen* Begriff durch Spiegeln aller Pfeile
- Bsp: dualer Begriff zu *Produkt*:  
Definition hinschreiben, Beispiele angeben
- Bsp: dualer Begriff zu: monomorph
- entsprechend: die duale Aussage  
diese gilt gdw. die originale (primale) Aussage gilt

## Übung (1)

- der identische Morphismus jedes Objektes ist eindeutig bestimmt
- Def. epi, mono, Dualität, Beispiele
- Schubert Satz 6.4.2 (prismatisches Diagramm)
- ... die dazu duale Aussage
- Kategorie der Graphen (was sind die Morphismen?)

## Funktoren

- Def: Funktor  $F$  von Kategorie  $C$  nach Kategorie  $D$ :
  - einer Wirkung auf Objekte:  $F_{\text{Obj}} : \text{Obj}(C) \rightarrow \text{Obj}(D)$
  - einer Wirkung auf Pfeile:  
 $F_{\text{Mor}} : (g : s \rightarrow t) \mapsto (g' : F_{\text{Obj}}(S) \rightarrow F_{\text{Obj}}(T))$   
mit den Eigenschaften:
    - $F_{\text{Mor}}(\text{id}_o) = \text{id}_{F_{\text{Obj}}(o)}$
    - $F_{\text{Mor}}(g \circ_C h) = F_{\text{Mor}}(g) \circ_D F_{\text{Mor}}(h)$
- Bsp: Funktoren zw. Kategorien von Halbordnungen?
- ```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
```

  
Beispiele: List, Maybe, Action

## Die Kleisli-Konstruktion

- Plan: für Kategorie  $C$ , Endo-Funktor  $F : C \rightarrow C$  definiere sinnvolle Struktur auf Pfeilen  $s \rightarrow Ft$
- Durchführung: die Kleisli-Kategorie  $K$  von  $F$ :  
 $\text{Obj}(K) = \text{Obj}(C)$ , Pfeile:  $s \rightarrow Ft$
- ...  $K$  ist tatsächlich eine Kategorie, wenn:
  - identische Morphismen (`return`), Komposition (`>=>`)
  - mit passenden Eigenschaften  
 $(F, \text{return}, (>=>))$  heißt dann *Monade*

Diese Komposition ist

```
f >=> g = \ x -> (f x >>= g)
```

## Functor, Applicative, Monad

```
https://wiki.haskell.org/
Functor-Applicative-Monad_Proposal
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
class Functor f => Applicative f where
  pure :: a -> f a
  (<*>) :: f (a -> b) -> (f a -> f b)
class Applicative m => Monad m where
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

eine Motivation: effizienterer Code für `>>=`,  
wenn das rechte Argument konstant ist  
(d.h. die Folge-Aktion hängt nicht vom Resultat der ersten  
Aktion ab: dann ist Monad nicht nötig, es reicht Applicative)

## Übung (2)

- Funktor- und Monadengesetze ausprobieren (ghci)
- „falsche“ Functor- und Monad-Instanzen für Maybe, List, Tree  
(d.h. typkorrekt, aber semantisch falsch)
- optional: inverse Zustandsmonade

## Die Maybe-Monade

```
data Maybe a = Nothing | Just a
instance Monad Maybe where ...
```

Beispiel-Anwendung:  

```
case ( evaluate e l ) of
  Nothing -> Nothing
  Just a -> case ( evaluate e r ) of
    Nothing -> Nothing
    Just b -> Just ( a + b )
```

  
mittels der Monad-Instanz von Maybe:  

```
evaluate e l >>= \ a ->
  evaluate e r >>= \ b ->
    return ( a + b )
```

  
Ü: dasselbe mit do-Notation

## List als Monade

```
instance Monad [] where
  return = \ x -> [x]
  m >>= f = case m of
    [] -> []
    x : xs -> f x ++ ( xs >>= f )
```

Beispiel:  

```
do a <- [ 1 .. 4 ]
   b <- [ 2 .. 3 ]
   return ( a * b )
```

## Monaden: Zusammenfassung

- verwendet zur Definition semantischer Bereiche,
- **Monade** = Monoid über Endofunktoren in Hask, (Axiome für `return, >=>` bzw. `>>=`)
- Notation `do { x <- foo ; bar ; .. }` (`>>=` ist das benutzer-definierte Semikolon)
- Grundlagen: Kategorien-Theorie (ca. 1960), in Funktl. Prog. seit ca. 1990 <http://homepages.inf.ed.ac.uk/wadler/topics/monads.html>
- in anderen Sprachen: F#: *Workflows*, C#: LINQ-Syntax
- GHC ab 7.10: `Control.Applicative: pure` und `<*>` (= `return` und eingeschränktes `>>=`)

## Kombinator-Parser

### Datentyp für Parser

```
data Parser c a =
    Parser ( [c] -> [ (a, [c]) ] )
```

- über Eingabestrom von Zeichen (Token) *c*,
- mit Resultattyp *a*,
- nichtdeterministisch (List).

Beispiel-Parser, Aufrufen mit:

```
parse :: Parser c a -> [c] -> [(a, [c])]
parse (Parser f) w = f w
```

## Elementare Parser (I)

```
-- | das nächste Token
next :: Parser c c
next = Parser $ \ toks -> case toks of
    [] -> []
    ( t : ts ) -> [ ( t, ts ) ]
-- | das Ende des Tokenstroms
eof :: Parser c ()
eof = Parser $ \ toks -> case toks of
    [] -> [ ( (), [] ) ]
    _ -> []
-- | niemals erfolgreich
reject :: Parser c a
reject = Parser $ \ toks -> []
```

## Monadisches Verketteten von Parsern

Definition:

```
instance Monad ( Parser c ) where
    return x = Parser $ \ s ->
        return ( x, s )
    Parser f >>= g = Parser $ \ s -> do
        ( a, t ) <- f s
        let Parser h = g a
            h t
```

beachte: das *return/do* gehört zur List-Monade

Anwendungsbeispiel:

```
p :: Parser c (c,c)
p = do x <- next ; y <- next ; return (x,y)
```

## Elementare Parser (II)

```
satisfy :: ( c -> Bool ) -> Parser c c
satisfy p = do
    x <- next
    if p x then return x else reject

expect :: Eq c => c -> Parser c c
expect c = satisfy ( == c )

ziffer :: Parser Char Integer
ziffer = do
    c <- satisfy Data.Char.isDigit
    return $ fromIntegral
        $ fromEnum c - fromEnum '0'
```

## Kombinatoren für Parser (I)

- Folge (and then) (ist `>>=` aus der Monade)
- Auswahl (or)

```
( <|> ) :: Parser c a -> Parser c a -> Parser c a
Parser f <|> Parser g = Parser $ \ s -> f s ++ g s
```

- Wiederholung (beliebig viele)

```
many, many1 :: Parser c a -> Parser c [a]
many p = many1 p <|> return []
many1 p = do x <- p ; xs <- many p ; return $ x : xs
```

```
zahl :: Parser Char Integer = do
    zs <- many1 ziffer
    return $ foldl ( \ a z -> 10*a+z ) 0 zs
```

## Kombinator-Parser und Grammatiken

Grammatik mit Regeln  $S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \epsilon$  entspricht

```
s :: Parser Char ()
s = do { expect 'a' ; s ; expect 'b' ; s }
<|> return ()
```

Anwendung: `exec "abab" $ do s ; eof`

## Robuste Parser-Bibliotheken

Designfragen:

- asymmetrisches `<|>`
- Nichtdeterminismus einschränken
- Fehlermeldungen (Quelltextposition)

Beispiel: Parsec (Autor: Daan Leijen)

<http://www.haskell.org/haskellwiki/Parsec>

## Asymmetrische Komposition

gemeinsam:

```
(<|>) :: Parser c a -> Parser c a
      -> Parser c a
Parser p <|> Parser q = Parser $ \ s -> ...
```

- symmetrisch: `p s ++ q s`
- asymmetrisch: `if null p s then q s else p s`

Anwendung: `many` liefert nur maximal mögliche Wiederholung (nicht auch alle kürzeren)

## Nichtdeterminismus einschränken

- Nichtdeterminismus = Berechnungsbaum = Backtracking
- asymmetrisches `p <|> q`: probiere erst `p`, dann `q`
- häufiger Fall: `p` lehnt „sofort“ ab

Festlegung (in `Parsec`): wenn `p` wenigstens ein Zeichen verbraucht, dann wird `q` nicht benutzt (d. h. `p` muß erfolgreich sein)

Backtracking dann nur durch `try p <|> q`

## Fehlermeldungen

- Fehler = Position im Eingabestrom, bei der es „nicht weitergeht“
- und auch durch Backtracking keine Fortsetzung gefunden wird
- Fehlermeldung enthält:
  - Position
  - Inhalt (Zeichen) der Position
  - Menge der Zeichen mit Fortsetzung

## Pretty-Printing (I)

John Hughes's and Simon Peyton Jones's Pretty Printer Combinators

Based on *The Design of a Pretty-printing Library in Advanced Functional Programming*, Johan Jeuring and Erik Meijer (eds), LNCS 925

<http://hackage.haskell.org/packages/archive/pretty/1.0.1.0/doc/html/Text-PrettyPrint-HughesPJ.html>

## Pretty-Printing (II)

- `data Doc` abstrakter Dokumententyp, repräsentiert Textblöcke
- Konstruktoren:

```
text :: String -> Doc
```
- Kombinatoren:

```
vcat      :: [ Doc ] -> Doc -- vertikal
hcat, hsep :: [ Doc ] -> Doc -- horizontal
```
- Ausgabe: `render :: Doc -> String`

## Bidirektionale Programme

Motivation: `parse` und `(pretty-)print` aus *einem* gemeinsamen Quelltext

Tillmann Rendel and Klaus Ostermann: *Invertible Syntax Descriptions*, Haskell Symposium 2010

<http://lambda-the-ultimate.org/node/4191>

Datentyp

```
data PP a = PP
  { parse :: String -> [(a,String)]
  , print :: a -> Maybe String
  }
```

Spezifikation, elementare Objekte, Kombinatoren?

## Ablaufsteuerung/Continuations

### Definition

(alles nach: Turbak/Gifford Ch. 17.9)

CPS-Transformation (continuation passing style):

- original: Funktion gibt Wert zurück

```
f == (abs (x y) (let ( ... ) v))
```

- `cps`: Funktion erhält zusätzliches Argument, das ist eine *Fortsetzung* (continuation), die den Wert verarbeitet:

```
f-cps == (abs (x y k) (let ( ... ) (k v)))
```

`aus g (f 3 2)` wird `f-cps 3 2 g-cps`

### Motivation

Funktionsaufrufe in CPS-Programm kehren nie zurück, können also als Sprünge implementiert werden!

CPS als einheitlicher Mechanismus für

- Linearisierung (sequentielle Anordnung von primitiven Operationen)
- Ablaufsteuerung (Schleifen, nicht lokale Sprünge)
- Unterprogramme (Übergabe von Argumenten und Resultat)
- Unterprogramme mit mehreren Resultaten

## CPS für Linearisierung

$(a + b) * (c + d)$  wird übersetzt (linearisiert) in

```
( \ top ->
  plus a b $ \ x ->
  plus c d $ \ y ->
  mal x y top
) ( \ z -> z )
```

```
plus x y k = k (x + y)
```

```
mal x y k = k (x * y)
```

später tatsächlich als Programmtransformation (Kompilation)

## CPS für Resultat-Tupel

wie modelliert man Funktion mit mehreren Rückgabewerten?

- benutze Datentyp Tupel (Paar):

```
f : A -> (B, C)
```

- benutze Continuation:

```
f/cps : A -> (B -> C -> D) -> D
```

## CPS/Tupel-Beispiel

erweiterter Euklidischer Algorithmus:

```
prop_egcd x y =
  let (p,q) = egcd x y
  in (p*x + q*y) == gcd x y
```

```
egcd :: Integer -> Integer
```

```
-> ( Integer, Integer )
```

```
egcd x y = if y == 0 then ???
           else let (d,m) = divMod x y
                   (p,q) = egcd y m
                 in ???
```

vervollständige, übersetze in CPS

## CPS für Ablaufsteuerung

Wdhlg: CPS-Transformation von  $1 + (2 * (3 - (4 + 5)))$  ist

```
\ top -> plus 4 5 $ \ a ->
         minus 3 a $ \ b ->
         mal 2 b $ \ c ->
         plus 1 c top
```

Neu: label und jump

```
1 + label foo (2 * (3 - jump foo (4 + 5)))
```

Semantik: durch label wird die aktuelle Continuation

benannt: `foo = \ c -> plus 1 c top`

und durch jump benutzt:

```
\ top -> plus 4 5 $ \ a -> foo a
```

Vergleiche: label: Exception-Handler deklarieren,

jump: Exception auslösen

## Semantik für CPS

Semantik von Ausdruck  $x$  in Umgebung  $E$

ist Funktion von Continuation nach Wert (Action)

```
value (E, label L B) = \ k ->
```

```
  value (E[L/k], B) k
```

```
value (E, jump L B) = \ k ->
```

```
  value (E, L) $ \ k' ->
```

```
  value (E, B) k'
```

Beispiel 1:

```
value (E, label x x)
```

```
  = \ k -> value (E[x/k], x) k
```

```
  = \ k -> k k
```

## Beispiel 2

```
value (E, jump (label x x) (label y y))
```

```
= \ k ->
```

```
  value (E, label x x) $ \ k' ->
```

```
  value (E, label y y) k'
```

```
= \ k ->
```

```
  value (E, label y y) (value (E, label x x)
```

```
= \ k -> ( \ k0 -> k0 k0 ) ( \ k1 -> k1 k1 )
```

## Semantik

semantischer Bereich:

```
type Continuation a = a -> Action Val
```

```
data CPS a
```

```
  = CPS ( Continuation a -> Action Val )
```

```
evaluate :: Env -> Exp -> CPS Val
```

Plan:

- Syntax: Label, Jump, Parser

- Semantik:

– Verkettung durch `>>=` aus `instance Monad CPS`

– Einbetten von `Action Val` durch `lift`

– `evaluate` für bestehende Sprache (CBV)

– `evaluate` für label und jump

## CPS als Monade

```
feed :: CPS a -> ( a -> Action Val )
```

```
-> Action Val
```

```
feed ( CPS s ) c = s c
```

```
feed ( s >>= f ) c =
```

```
  feed s ( \ x -> feed ( f x ) c )
```

```
feed ( return x ) c = c x
```

```
lift :: Action a -> CPS a
```

## Beispiele/Übung KW 50: Parser

- Parser für  $\backslash x y z \rightarrow \dots$ , benutze `foldr`
- Parser für `let { f x y = ... } in ...`
- Parser für `let { a = b ; c = d ; ... } in ..`
- `Text.Parsec.Combinator.notFollowedBy` zur Erkennung von Schlüsselwörtern
- Ziffern in Bezeichnern

## Beispiele/Übung KW 50: CPS

Rekursion (bzw. Schleifen) mittels Label/Jump (und ohne Rec oder Fixpunkt-Kombinator) folgende Beispiele sind aus Turbak/Gifford, DCPL, 9.4.2

- Beschreibe die Auswertung (Datei `ex4.hs`)

```
let { d = \ f -> \ x -> f (f x) }
in let { f = label l ( \ x -> jump l x ) }
    in f d ( \ x -> x + 1 ) 0
```

- `jump (label x x) (label y y)`
- Ersetze `undefined`, so daß  $f x = x!$  (Datei `ex5.hs`)

```
let { triple x y z = \ s -> s x y z
```

```
; fst t = t ( \ x y z -> x )
; snd t = t ( \ x y z -> y )
; thd t = t ( \ x y z -> z )
; f x = let { p = label start undefined
            ; loop = fst p ; n = snd p
            } in if 0 == n then a
            else loop (triple loop
} in f 5
```

## Typen

### Grundlagen

Typ = statische Semantik  
(Information über mögliches Programm-Verhalten, erhalten ohne Programm-Ausführung)

formale Beschreibung:

- $P$ : Menge der Ausdrücke (Programme)
- $T$ : Menge der Typen
- Aussagen  $p :: t$  (für  $p \in P, t \in T$ )
  - prüfen oder
  - herleiten (inferieren)

## Inferenzsystem für Typen (Syntax)

- Grundbereich: Aussagen der Form  $E \vdash X : T$   
(in Umgebung  $E$  hat Ausdruck  $X$  den Typ  $T$ )
- Menge der Typen:
  - primitiv: `Int`, `Bool`
  - zusammengesetzt:
    - \* Funktion  $T_1 \rightarrow T_2$
    - \* Verweistyp `Ref T`
    - \* Tupel  $(T_1, \dots, T_n)$ , einschl.  $n = 0$
- Umgebung bildet Namen auf Typen ab

## Inferenzsystem für Typen (Semantik)

- Axiome f. Literale:  $E \vdash \text{Zahl-Literal} : \text{Int}, \dots$
- Regel für prim. Operationen:  $\frac{E \vdash X : \text{Int}, E \vdash Y : \text{Int}}{E \vdash (X + Y) : \text{Int}}, \dots$
- Abstraktion/Applikation: ...
- Binden/Benutzen von Bindungen: ...  
hierbei (vorläufige) Design-Entscheidungen:
  - Typ eines Ausdrucks wird inferiert
  - Typ eines Bezeichners wird ...
    - in Abstraktion: deklariert
    - in Let: inferiert

## Inferenz für Let

(alles ganz analog zu Auswertung von Ausdrücken)

- Regeln für Umgebungen

–  $E[v := t] \vdash v : t$   
–  $\frac{E \vdash v' : t'}{E[v := t] \vdash v' : t'}$  für  $v \neq v'$

- Regeln für Bindung:

$$\frac{E \vdash X : s, \quad E[v := s] \vdash Y : t}{E \vdash \text{let } v = X \text{ in } Y : t}$$

## Applikation und Abstraktion

- Applikation:

$$\frac{E \vdash F : T_1 \rightarrow T_2, \quad E \vdash A : T_1}{E \vdash (FA) : T_2}$$

vergleiche mit *modus ponens*

- Abstraktion (mit deklariertem Typ der Variablen)

$$\frac{E[v := T_1] \vdash X : T_2}{E \vdash (\lambda(v :: T_1)X) : T_1 \rightarrow T_2}$$

## Eigenschaften des Typsystems

Wir haben hier den *einfach getypten Lambda-Kalkül* nachgebaut:

- jedes Programm hat höchstens einen Typ
- nicht jedes Programm hat einen Typ.  
Der  $Y$ -Kombinator  $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$  hat keinen Typ
- jedes getypte Programm terminiert  
(Begründung: bei jeder Applikation  $FA$  ist der Typ von  $FA$  kleiner als der Typ von  $F$ )

Übung: typisiere  $t\ t\ t\ t\ succ\ 0$  mit  
 $succ = \lambda x \rightarrow x + 1$  und  $t = \lambda f\ x \rightarrow f\ (f\ x)$

## Polymorphe Typen

### Motivation

ungetypt:

```
let { t = \ f x -> f (f x)
      ; s = \ x -> x + 1
      } in (t t s) 0
```

einfach getypt nur so möglich:

```
let { t2 = \ (f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
             (x :: Int -> Int) -> f (f x)
             ; t1 = \ (f :: Int -> Int) (x :: Int) ->
             ; s = \ (x :: Int) -> x + 1
             } in (t2 t1 s) 0
```

wie besser?

### Typ-Argumente (Beispiel)

Typ-Abstraktion, Typ-Applikation:

```
let { t = \ <t>
      -> \ (f : t -> t) ->
           \ (x : t) ->
               f (f x)
      ; s = \ (x : int) -> x + 1
      }
in (((t <int -> int>) (t <int>)) s) 0
```

zur Laufzeit werden die Abstraktionen und Typ-Applikationen *ignoriert*

### Typ-Argumente (Regeln)

neuer Typ  $\forall t.T$ ,

neue Ausdrücke mit Inferenz-Regeln:

- Typ-Abstraktion: erzeugt parametrischen Typ

$$\frac{E \vdash \dots}{E \vdash \Lambda t \rightarrow X : \dots}$$

- Typ-Applikation: instantiiert param. Typ

$$\frac{E \vdash F : \dots}{E \vdash F \langle T_2 \rangle : \dots}$$

Ü: Vergleich Typ-Applikation mit expliziter Instantiierung von polymorphen Methoden in C#

### Inferenz allgemeingültige Formeln

Grundbereich: aussagenlogische Formeln (mit Variablen und Implikation)

Axiom-Schemata:

$X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ ,  $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$   
Regel-Schema (*modus ponens*):  $\frac{X \rightarrow Y, X}{Y}$

Beobachtungen/Fragen:

- Übung (autotool): Leite  $p \rightarrow p$  ab.
- (*Korrektheit*): jede ableitbare Formel ist allgemeingültig
- (*Vollständigkeit*): sind alle allgemeingültigen Formeln (in dieser Signatur) ableitbar?

### Typen und Daten

- bisher: Funktionen von Daten nach Daten  
 $\lambda (x :: \text{Int}) \rightarrow x + 1$
- heute: Funktionen von Typ nach Daten  
 $\lambda (t :: \text{Type}) \rightarrow \lambda (x :: t) \rightarrow x$
- Funktionen von Typ nach Typ (ML, Haskell, Java, C#)  
 $\lambda (t :: \text{Type}) \rightarrow \text{List } t$
- Funktionen von Daten nach Typ (*dependent types*)  
 $\lambda (t :: \text{Typ}) (n :: \text{Int}) \rightarrow \text{Array } t\ n$   
Sprachen: Cayenne, Coq, Agda  
Eigenschaften: Typkorrektheit i. A. nicht entscheidbar, d. h. Programmierer muß Beweis hinschreiben.

## Typ-Rekonstruktion

### Motivation

Bisher: Typ-Deklarationspflicht für Variablen in Lambda. scheint sachlich nicht nötig. In vielen Beispielen kann man die Typen einfach rekonstruieren:

```
let { t = \ f x -> f (f x)
      ; s = \ x -> x + 1
      } in t s 0
```

Diesen Vorgang automatisieren!  
(zunächst für einfaches (nicht polymorphes) Typsystem)

### Realisierung mit Constraints

Inferenz für Aussagen der Form  $E \vdash X : (T, C)$

- $E$ : Umgebung (Name  $\rightarrow$  Typ)
  - $X$ : Ausdruck (Exp)
  - $T$ : Typ
  - $C$ : Menge von Typ-Constraints
- wobei
- Menge der Typen  $T$  erweitert um Variablen
  - Constraint: Paar von Typen  $(T_1, T_2)$
  - Lösung eines Constraints: Substitution  $\sigma$  mit  $T_1\sigma = T_2\sigma$

## Inferenzregeln f. Rekonstruktion (Plan)

Plan:

- Aussage  $E \vdash X : (T, C)$  ableiten,
- dann  $C$  lösen (allgemeinsten Unifikator  $\sigma$  bestimmen)
- dann ist  $T\sigma$  der (allgemeinste) Typ von  $X$  (in Umgebung  $E$ )

Für (fast) jeden Teilausdruck eine eigene („frische“) Typvariable ansetzen, Beziehungen zwischen Typen durch Constraints ausdrücken.

Inferenzregeln? Implementierung? — Testfall:

```
\ f g x y ->
  if (f x y) then (x+1) else (g (f x True))
```

– Typeset by FoilTeX –

136

## Inferenzregeln f. Rekonstruktion

- primitive Operationen (Beispiel)

$$\frac{E \vdash X_1 : (T_1, C_1), \quad E \vdash X_2 : (T_2, C_2)}{E \vdash X_1 + X_2 : (\text{Int}, \{T_1 = \text{Int}, T_2 = \text{Int}\} \cup C_1 \cup C_2)}$$

- Applikation

$$\frac{E \vdash F : (T_1, C_1), \quad E \vdash A : (T_2, C_2)}{E \vdash (FA) : \dots}$$

- Abstraktion

$$\frac{\dots}{E \vdash \lambda x. B : \dots}$$

- (Ü) Konstanten, Variablen, if/then/else

– Typeset by FoilTeX –

137

## Substitutionen (Definition)

- Signatur  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \dots \cup \Sigma_k$ ,
- $\text{Term}(\Sigma, V)$  ist kleinste Menge  $T$  mit  $V \subseteq T$  und  $\forall 0 \leq i \leq k, f \in \Sigma_i, t_1 \in T, \dots, t_i \in T : f(t_1, \dots, t_i) \in T$ .  
(hier Anwendung für Terme, die Typen beschreiben)
- Substitution: partielle Abbildung  $\sigma : V \rightarrow \text{Term}(\Sigma, V)$ ,  
Definitionsbereich:  $\text{dom } \sigma$ , Bildbereich:  $\text{img } \sigma$ .
- Substitution  $\sigma$  auf Term  $t$  anwenden:  $t\sigma$
- $\sigma$  heißt *pur*, wenn kein  $v \in \text{dom } \sigma$  als Teilterm in  $\text{img } \sigma$  vorkommt.

– Typeset by FoilTeX –

138

## Substitutionen: Produkt

Produkt von Substitutionen:  $t(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (t\sigma_1)\sigma_2$

Beispiel 1:

$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto a\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$ .

Beispiel 2 (nachrechnen!):

$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto X\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2$

Eigenschaften:

- $\sigma$  pur  $\Rightarrow \sigma$  idempotent:  $\sigma \circ \sigma = \sigma$
- $\sigma_1$  pur  $\wedge \sigma_2$  pur impliziert nicht  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  pur

Implementierung:

```
import Data.Map
type Substitution = Map Identifier Term
times :: Substitution -> Substitution -> Sub
```

– Typeset by FoilTeX –

139

## Substitutionen: Ordnung

Substitution  $\sigma_1$  ist *allgemeiner als* Substitution  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 \lesssim \sigma_2 \iff \exists \tau : \sigma_1 \circ \tau = \sigma_2$$

Beispiele:

- $\{X \mapsto Y\} \lesssim \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$ ,
- $\{X \mapsto Y\} \lesssim \{Y \mapsto X\}$ ,
- $\{Y \mapsto X\} \lesssim \{X \mapsto Y\}$ .

Eigenschaften

- Relation  $\lesssim$  ist Prä-Ordnung ( $\dots, \dots$ , aber nicht  $\dots$ )
- Die durch  $\lesssim$  erzeugte Äquivalenzrelation ist die  $\dots$

– Typeset by FoilTeX –

140

## Unifikation—Definition

Unifikationsproblem

- Eingabe: Terme  $t_1, t_2 \in \text{Term}(\Sigma, V)$
- Ausgabe: ein allgemeinsten Unifikator (mgu): Substitution  $\sigma$  mit  $t_1\sigma = t_2\sigma$ .

(allgemeinst: infimum bzgl.  $\lesssim$ )

Satz: jedes Unifikationsproblem ist

- entweder gar nicht
- oder bis auf Umbenennung eindeutig lösbar.

– Typeset by FoilTeX –

141

## Unifikation—Algorithmus

$\text{mgu}(s, t)$  nach Fallunterscheidung

- $s$  ist Variable:  $\dots$
- $t$  ist Variable: symmetrisch
- $s = (s_1 \rightarrow s_2)$  und  $t = (t_1 \rightarrow t_2)$ :  $\dots$

$\text{mgu} :: \text{Term} \rightarrow \text{Term} \rightarrow \text{Maybe Substitution}$

– Typeset by FoilTeX –

142

## Unifikation—Komplexität

Bemerkungen:

- gegebene Implementierung ist korrekt, übersichtlich, aber nicht effizient,
- (Ü) es gibt Unif.-Probl. mit exponentiell großer Lösung,
- eine komprimierte Darstellung davon kann man aber in Polynomialzeit ausrechnen.

Bsp: Signatur  $\{f/2, a/0\}$ ,

unifiziere  $f(X_1, f(X_2, f(X_3, f(X_4, a))))$  mit

$f(f(X_2, X_2), f(f(X_3, X_3), f(f(X_4, X_4), f(a, a))))$

– Typeset by FoilTeX –

143

## Rekonstruktion polymorpher Typen

... ist im Allgemeinen nicht möglich:

Joe Wells: *Typability and Type Checking in System F Are Equivalent and Undecidable*, Annals of Pure and Applied Logic 98 (1998) 111–156, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.6.6483>

übliche Einschränkung (ML, Haskell): *let-Polymorphism*: Typ-Abstraktionen nur für let-gebundene Bezeichner:

```
let { t = \ f x -> f(f x) ; s = \ x -> x+1 }
in t t s 0
```

folgendes ist dann nicht typisierbar (t ist monomorph):

```
( \ t -> let { s = \ x -> x+1 } in t t s 0 )
( \ f x -> f ( f x ) )
```

## Implementierung

Luis Damas, Roger Milner: *Principal Type Schemes for Functional Programs* 1982,

- Inferenzsystem ähnlich zu Rekonstruktion monomorpher Typen mit Aussagen der Form  $E \vdash X : (T, C)$
- Umgebung  $E$  ist jetzt partielle Abbildung von Name nach *Typschema* (nicht wie bisher: nach Typ).
- Bei Typinferenz für let-gebundene Bezeichner wird über die freien Typvariablen generalisiert.
- Dazu Teil-Constraint-Systeme lokal lösen.

Grabmüller 2006 <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.65.7733>, Jones 1999 <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.65.7733>

1.1.134.7274

## Übung: Tupel

### Tupel

- abstrakte Syntax

```
data Exp = .. | Tuple [Exp] | Nth Exp Int
```

- konkrete Syntax (runde Klammern, Kommas, keine 1-Tupel)
- dynamische Semantik: `data Val = .. , Interpreter.value`
- statische Semantik (Typen)
  - abstrakte Syntax

- konkrete Syntax (für Typrekonstruktion nicht nötig)
- Typisierung (Inferenzregeln, Implementierung)

## Plan für Compiler

### Transformationen/Ziel

- continuation passing (Programmablauf explizit)
- closure conversion (alle Umgebungen explizit)
- lifting (alle Unterprogramme global)
- Registervergabe (alle Argumente in Registern)

Ziel: maschinen(nahes) Programm mit

- globalen (Register-)Variablen (keine lokalen)
- Sprüngen (kein return)
- automatischer Speicherbereinigung

## CPS-Transformation

### CPS-Transformation: Spezifikation

(als Schritt im Compiler)

- Eingabe: Ausdruck  $X$ , Ausgabe: Ausdruck  $Y$
- Semantik: Wert von  $X = \text{Wert von } Y(\lambda v.v)$
- Syntax:
  - $X \in \text{Exp}$  (fast) beliebig,
  - $Y \in \text{Exp/CPS}$  stark eingeschränkt:
    - \* keine geschachtelten Applikationen
    - \* Argumente von Applikationen und Operationen (+, \*, >) sind Variablen oder Literale

### CPS-Transformation: Zielsyntax

drei Teilmengen von `data Exp`:

```
Exp_CPS ==> App Identifier Exp_Value^*
          | If Exp_Value Exp_CPS Exp_CPS
          | Let Identifier Exp_Letable Exp_CPS
Exp_Value ==> Literal | Identifier
Exp_Letable ==> Literal
            | Abs Identifier Exp_CPS
            | Exp_Value Op Exp_Value
```

Übung 1: Übersetze von `Exp` nach `Exp_CPS`:

```
(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
```

Übung 2: wegen CPS brauchen wir tatsächlich:

```
\ k -> k ((0 - (b * b)) + (4 * (a * c)))
```

## Beispiel

### Lösung 1:

```
(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
==>
let { t.3 = b * b } in
  let { t.2 = 0 - t.3 } in
    let { t.5 = a * c } in
      let { t.4 = 4 * t.5 } in
        let { t.1 = t.2 + t.4 } in
          t.1
```

### Lösung 2:

```
\ k -> let ... in k t.1
```

## CPS-Transf. f. Abstraktion, Applikation

vgl. Sect. 6 in: Gordon Plotkin: *Call-by-name, call-by-value and the  $\lambda$ -calculus*, Th. Comp. Sci. 1(2) 1975, 125–159

[http://dx.doi.org/10.1016/0304-3975\(75\)90017-1](http://dx.doi.org/10.1016/0304-3975(75)90017-1),  
<http://homepages.inf.ed.ac.uk/gdp/>

- $CPS(v) = \lambda k.kv$
- $CPS(FA) = \lambda k.(CPS(F)(\lambda f.CPS(A)(\lambda a.fak)))$
- $CPS(\lambda x.B) = \lambda k.k(\lambda x.CPS(B))$

dabei sind  $k, f, a$  frische Namen.

Bsp.  $CPS(\lambda x.9) = \lambda k_2.k_2(\lambda x.CPS(9)) = \lambda k_2.k_2(\lambda x.k_1.k_19)$ ,  
 $CPS((\lambda x.9)8) =$

$\lambda k_4.(\lambda k_2.k_2(\lambda x.k_1.k_19))(\lambda f.((\lambda k_3.k_38)(\lambda a.fak_4)))$

Ü: Normalform von  $CPS((\lambda x.9)8)(\lambda z.z)$

## Namen

Bei der Übersetzung werden „frische“ Variablennamen benötigt (= die im Eingangsprogramm nicht vorkommen).

```
module Control.Monad.State where
data State s a = State ( s -> ( a, s ) )
get :: State s s ; put :: s -> State ()
evalState :: State s a -> s -> a
```

```
fresh :: State Int String
fresh = do k <- get ; put (k+1)
        return $ "f." ++ show k
```

```
type Transform a = State Int a
cps :: Exp -> Transform Exp
```

## Teilweise Auswertung

- Interpreter (bisher): komplette Auswertung (Continuations sind Funktionen, werden angewendet)
- CPS-Transformator (heute): gar keine Auswertung, (Continuations sind Ausdrücke)
- gemischter Transformator: benutzt sowohl
  - Continuations als Ausdrücke (der Zielsprache)
  - als auch Continuations als Funktionen (der Gastsprache)(compile time evaluation, partial evaluation)

## Partial Evaluation

- bisher: Applikation zur Laufzeit (Continuation bezeichnet durch  $Ref\ k :: Exp$ )

```
transform :: Exp -> Transform ExpCPS
transform x = case x of
  ConstInteger i -> do
    k <- fresh; return $ Abs k (App (Ref k) x)
```

- jetzt: Applikation während der Transformation (Continuation bezeichnet durch  $k :: Cont$ )

```
type Cont = ExpValue -> Transform ExpCPS
transform :: Exp -> (Cont -> Transform ExpCPS)
transform x = case x of
  ConstInteger i -> \ k -> k x
```

## Umrechnung zw. Continuations (I)

```
id2mc :: Name -> ExpValue -> Transform ExpCPS
id2mc c = \ v -> return $ MultiApp (Ref c) [v]
```

### Anwendung bei Abstraktion

```
Abs x b -> \ k -> do
  c <- fresh "k"
  b' <- cps b ( id2mc c )
  k $ MultiAbs [ x, c ] b' -- Ansatz
```

tatsächlich statt letzter Zeile:

```
fresh_let (return $ MultiAbs [f,c] b')
```

mit Hilfsfunktion

```
fresh_let t k = do
  f <- fresh "l" ; a <- t
  b <- k ( Ref f ) ; return $ Let f a b
```

## Umrechnung zw. Continuations (II)

```
mc2exp :: Cont -> Transform ExpCPS
mc2exp k = do
  e <- fresh "e" ; out <- k (Ref e)
  return $ MultiAbs [e] out
```

### Anwendung:

```
App f a -> \ k ->
  cps f $ \ f' ->
  cps a $ \ a' -> do -- Ansatz:
    x <- mc2exp k; return $ MultiApp f' [a', x]
```

tatsächlich statt Ansatz:

```
fresh_let ( mc2exp k ) $ \ x ->
  return $ MultiApp f' [ a', x ]
```

## Vergleich CPS-Interpreter/Transformator

Wiederholung CPS-Interpreter:

```
type Cont = Val -> Action Val
eval :: Env -> Exp -> Cont -> Action Val
eval env x = \ k -> case x of
  ConstInt i -> ...
  Plus a b -> ...
```

CPS-Transformator:

```
type Cont = ExpValue -> Transform ExpCPS
cps :: Exp -> Cont -> Transform ExpCPS
cps x = \ m -> case x of
  ConstInt i -> ...
  Plus a b -> ...
```

## Übung CPS-Transformation

- Transformationsregeln für Ref, App, Abs, Let nachvollziehen (im Vergleich zu CPS-Interpreter)
- Transformationsregeln für if/then/else, new/put/get hinzufügen
- anwenden auf eine rekursive Funktion (z. B. Fakultät), wobei Rekursion durch Zeiger auf Abstraktion realisiert wird

## Closure Conversion

### Motivation

(Literatur: DCPL 17.10) — Beispiel:

```
let { linear = \ a -> \ x -> a * x + 1
    ; f = linear 2 ; g = linear 3
    }
in f 4 * g 5
```

beachte nicht lokale Variablen: ( $\lambda x \rightarrow \dots a \dots$ )

- Semantik-Definition (Interpreter) benutzt Umgebung
- Transformation (closure conversion, environment conversion) (im Compiler) macht Umgebungen explizit.

## Spezifikation

closure conversion:

- Eingabe: Programm  $P$
  - Ausgabe: äquivalentes Programm  $P'$ , bei dem alle Abstraktionen *geschlossen* sind
  - zusätzlich:  $P$  in CPS  $\Rightarrow P'$  in CPS
- geschlossen: alle Variablen sind lokal

Ansatz:

- Werte der benötigten nicht lokalen Variablen  $\Rightarrow$  zusätzliche(s) Argument(e) der Abstraktion
- auch Applikationen entsprechend ändern

## closure passing style

- Umgebung = Tupel der Werte der benötigten nicht lokalen Variablen
- Closure = Paar aus Code und Umgebung  
realisiert als Tupel (Code,  $\underbrace{W_1, \dots, W_n}_{\text{Umgebung}}$ )

```
\ x -> a * x + 1
==>
\ clo x ->
  let { a = nth clo 1 } in a * x + 1
```

Closure-Konstruktion?

Komplette Übersetzung des Beispiels?

## Transformation

```
CLC[ \ i_1 .. i_n -> b ] =
  (tuple ( \ clo i_1 .. i_n ->
    let { v_1 = nth 1 clo ; .. }
    in CLC[b]
    ) v_1 .. )
```

wobei  $\{v_1, \dots\} =$  freie Variablen in  $(\lambda i_1 \dots i_n \rightarrow b)$

```
CLC[ (f a_1 .. a_n) ] =
  let { clo = CLC[f]
    ; code = nth 0 clo
  } in code clo CLC[a_1] .. CLC[a_n]
```

- für alle anderen Fälle: strukturelle Rekursion
- zur Erhaltung der CPS-Form: Spezialfall bei let

## Lifting

### Spezifikation

(lambda) lifting:

- Eingabe: Programm  $P$ , bei dem alle Abstraktionen geschlossen sind
- Ausgabe: äquivalentes Programm  $P'$ , bei dem alle Abstraktionen (geschlossen und) global sind

Motivation: in Maschinencode gibt es nur globale Sprungziele

(CPS-Transformation: Unterprogramme kehren nie zurück  $\Rightarrow$  globale Sprünge)

## Realisierung

nach closure conversion sind alle Abstraktionen geschlossen, diese müssen nur noch aufgesammelt und eindeutig benannt werden.

```
let { g1 = \ v1 .. vn -> b1
    ...
    ; gk = \ v1 .. vn -> bk
  } in b
```

dann in  $b_1, \dots, b_k$ ,  $b$  keine Abstraktionen gestattet

- Zustandsmonade zur Namenszeugung ( $g_1, g_2, \dots$ )
- Ausgabemonade (`WriterT`) zum Aufsammeln
- $g_1, \dots, g_k$  dürften nun sogar rekursiv sein (sich gegenseitig aufrufen)

## Lambda-Lifting (Plan)

um ein Programm zu erhalten, bei dem alle Abstraktionen global sind:

- bisher: closure conversion + lifting:  
(verwendet Tupel)
- Alternative: lambda lifting  
(reiner  $\lambda$ -Kalkül, keine zusätzlichen Datenstrukturen)

## Lambda-Lifting (Realisierung)

- verwendet Kombinatoren (globale Funktionen)

$$I = \lambda x.x, S = \lambda xyz.xz(yz), K = \lambda xy.x$$

- und Transformationsregeln

$$\text{lift}(FA) = \text{lift}(F) \text{lift}(A), \text{lift}(\lambda x.B) = \text{lift}_x(B);$$

- Spezifikation:  $\text{lift}_x(B)x \rightarrow_{\beta}^* B$

- Implementierung:

$$\text{falls } x \notin \text{FV}(B), \text{ dann } \text{lift}_x(B) = KB;$$

$$\text{sonst } \text{lift}_x(x) = I, \text{lift}_x(FA) = S \text{lift}_x(F) \text{lift}_x(A)$$

Beispiel:  $\text{lift}(\lambda x.\lambda y.yx) = \text{lift}_x(\text{lift}_y(yx)) = \text{lift}_x(SI(Kx)) = S(K(SI))(S(KK)I)$

## Registervergabe

### Motivation

- (klassische) reale CPU/Rechner hat nur *globalen* Speicher (Register, Hauptspeicher)
- Argumentübergabe (Hauptprogramm  $\rightarrow$  Unterprogramm) muß diesen Speicher benutzen (Rückgabe brauchen wir nicht wegen CPS)
- Zugriff auf Register schneller als auf Hauptspeicher  $\Rightarrow$  bevorzugt Register benutzen.

### Plan (I)

- Modell: Rechner mit beliebig vielen Registern  $(R_0, R_1, \dots)$
- Befehle:
  - Literal laden (in Register)
  - Register laden (kopieren)
  - direkt springen (zu literaler Adresse)
  - indirekt springen (zu Adresse in Register)
- Unterprogramm-Argumente in Registern:
  - für Abstraktionen:  $(R_0, R_1, \dots, R_k)$  (genau diese, genau dieser Reihe nach)
  - für primitive Operationen: beliebig
- Transformation: lokale Namen  $\rightarrow$  Registernamen

### Plan (II)

- Modell: Rechner mit begrenzt vielen realen Registern, z. B.  $(R_0, \dots, R_7)$
- falls diese nicht ausreichen: *register spilling* virtuelle Register in Hauptspeicher abbilden
- Hauptspeicher (viel) langsamer als Register: möglichst wenig HS-Operationen: geeignete Auswahl der Spill-Register nötig

## Registerbenutzung

Allgemeine Form der Programme:

```
(let* ((r1 (...))
      (r2 (...))
      (r3 (...))
      ...
      (r4 (...)))
```

für jeden Zeitpunkt ausrechnen: Menge der *freien* Register (= deren aktueller Wert nicht (mehr) benötigt wird)  
nächstes Zuweisungsziel ist niedrigstes freies Register (andere Varianten sind denkbar)  
vor jedem UP-Aufruf: *register shuffle* (damit die Argumente in  $R_0, \dots, R_k$  stehen)

## Compiler-Übungen

(ist gleichzeitig Wiederholung Rekursion)

1. implementiere fehlende Codegenerierung/Runtime für

```
let { p = new 42
      ; f = \ x -> if (x == 0) then 1
                  else (x * (get p) (x-1))
      ; foo = put p f
    } in f 5
```

2. ergänze das Programm, so daß 5! ausgerechnet wird

```
let { f = label x (tuple x 5 1) }
in if ( 0 == nth 1 f )
then nth 2 f
else jump ...
      (tuple ... ..)
```

## Ausblick

### Informative Typen

in  $X :: T$ , der deklarierte Typ  $T$  kann eine schärfere Aussage treffen als aus  $X$  (Implementierung) ableitbar. das ist u.a. nützlich bei der Definition und Implementierung von (eingebetteten) domainspezifischen Sprachen

- generalized algebraic data types GADTs
- (parametric) higher order abstract syntax (P)HOAS
- Dependent Types (in Haskell)

## Typen für Listen

- das ist klar:

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
Cons False (Cons True Nil) :: List Bool
```

- nach welcher Deklaration ist

```
Cons True (Cons "foo" Nil)
```

statisch korrekt?

- Hinweis:

```
data List a b = ...
```

## Übung: Vollständige Binärbäume

- `data Tree a = Leaf a | Branch (Tree (a, a))`
- deklariere einen Baum `t :: Tree Int` mit 4 Schlüsseln
- implementiere `leaves :: Tree a -> [a]`

## GADT

- üblich (algebraischer Datentyp, ADT)

```
data Tree a =
  Leaf a | Branch (Tree a) (Tree a)
```

- äquivalente Schreibweise:

```
data Tree a where
  Leaf :: a -> Tree a
  Branch :: Tree a -> Tree a -> Tree a
```

- Verallgemeinerung (generalized ADT)

```
data Exp a where
  ConsInt :: Int -> Exp Int
  Greater :: Exp Int -> Exp Int -> Exp Bool
```

## Higher Order Abstract Syntax

```
data Exp a where
  Var :: a -> Exp a
  Abs :: (a -> Exp b) -> Exp (a -> b)
  App :: Exp (a -> b) -> Exp a -> Exp b

App (Abs $ \x -> Plus (C 1) (Var x)) (C 2)

value :: Exp a -> a
value e = case e of
  App f a -> value f (value a)
Ü: vervollständige Interpreter
```

## Dependent Types (I)

- `{-# language DataKinds #-}`  
`data Nat = Z | S Nat`

```
data Vec n a where
  Nil :: Vec Z a
  Cons :: a -> Vec n a -> Vec (S n) a
```

```
Cons False (Cons True Nil) :: Vec (S (S Z)) a
```

- type family `Plus a b` where  
`Plus Z b = b ; Plus (S a) b = S (Plus a b)`  
Typ von `append`, `reverse`?

## Dependent Types (II)

```
{-# OPTIONS_GHC
  -fplugin GHC.TypeLits.Normalize #-}
import GHC.TypeLits

data Vec l a where
  Nil :: Vec 0 a
  Cons :: a -> Vec l a -> Vec (1 + l) a

app :: Vec p a -> Vec q a -> Vec (q + p) a
```

## Zusammenfassung

### Methoden

- Inferenzsysteme
- Lambda-Kalkül
- (algebraischen Datentypen, Pattern Matching, Funktionen höherer Ordnung)
- Monaden

## Semantik

- dynamische (Programmausführung)
  - Interpretation
    - \* funktional, • imperativ (Speicher)
    - \* Ablaufsteuerung (Continuations)
  - Transformation (Kompilation)
    - \* CPS transformation
    - \* closure passing, lifting, • Registerzuweisung
- statische: Typisierung (Programmanalyse)
  - monomorph/polymorph
  - deklariert/rekonstruiert

## Monaden zur Programmstrukturierung

```
class Monad m where { return :: a -> m a ;
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b }
```

Anwendungen:

- semantische Bereiche f. Interpreter,
- Parser,
- Unifikation

Testfragen (für jede Monad-Instanz):

- Typ (z. B. Action)
- anwendungsspezifische Elemente (z. B. new, put)
- Implementierung der Schnittstelle (return, bind)

## Prüfungsvorbereitung

Beispielklausur <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ws11/cb/klausur/>

- was ist eine Umgebung (Env), welche Operationen gehören dazu?
- was ist eine Speicher (Store), welche Operationen gehören dazu?
- Gemeinsamkeiten/Unterschiede zw. Env und Store?
- Für  $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ : zeichne den Syntaxbaum, bestimme die Menge der freien und die Menge der gebundenen Variablen. Markiere im Syntaxbaum alle Redexe. Gib die

– Typeset by FoilTeX –

184

Menge der direkten Nachfolger an (einen Beta-Schritt ausführen).

- Definiere Beta-Reduktion und Alpha-Konversion im Lambda-Kalkül. Wozu wird Alpha-Konversion benötigt? (Dafür Beispiel angeben.)
- Wie kann man Records (Paare) durch Funktionen simulieren? (Definiere Lambda-Ausdrücke für `pair`, `first`, `second`)
- welche semantischen Bereiche wurden in den Interpretern benutzt? (definieren Sie `Val`, `Action Val`, `CPS Val`)
- welches sind die jeweils hinzukommenden

– Typeset by FoilTeX –

185

Ausdrucksmöglichkeiten der Quellsprache (Exp)?

- wie lauten die Monad-Instanzen für `Action`, `CPS`, `Parser`, was bedeutet jeweils das bind (`>>=`)?
- warum benötigt man call-by-name für Abstraktionen über den Programmablauf (warum kann man `if` oder `while` nicht mit call-by-value implementieren)?
- wie kann man call-by-name simulieren in einer call-by-value-Sprache?
- wie kann man call-by-value simulieren in einer call-by-name-Sprache (Antwort: durch CPS-Transformation)

– Typeset by FoilTeX –

186

Definiere Fakultät mittels Fixpunktoperator (Definiere das `f` in `fak = fix f`)

- Bezüglich welcher Halbordnung ist dieses `f` monoton? (Definiere die Ordnung, erläutere Monotonie an einem Beispiel.)
- Wie kann man Rekursion durch get/put simulieren? (Programmbeispiel ergänzen)
- Wie kann man Rekursion durch label/jump simulieren? (Programmbeispiel ergänzen)
- Für die Transformationen CPS, Closure Conv., Lifting, Registervergabe: welche Form haben jeweils Eingabe- und Ausgabeprogramm? Auf welchem Maschinenmodell

– Typeset by FoilTeX –

187

kann das Zielprogramm ausgeführt werden? (Welche Operationen muß das Laufzeitsystem bereitstellen?)

- Was sind die Bestandteile eines Inferenzsystems (Antwort: Grundbereich, Axiome, Regeln), wie kann man ein Axiom als Spezialfall einer Regel auffassen?
- wie lauten die Inferenzregeln für das Nachschlagen eines Namens in einer Umgebung?
- Inferenzregeln für Applikation, Abstraktion, Let, If/Then/Else im einfach getypten Kalkül
- Geben Sie ein Programm an, das sich nicht einfach (sondern nur polymorph) typisieren läßt. Geben Sie den polymorphen Typ an.

– Typeset by FoilTeX –

188

Inferenz-Regeln für Typ-Applikation, Typ-Abstraktion im polymorphen Kalkül

- für Typ-Rekonstruktion im einfach getypten Kalkül: Welches ist der Grundbereich des Inferenzsystems?
- geben Sie die Inferenzregel für Typrekonstruktion bei If/Then/Else an
- Geben Sie eine Inferenzregel für Typrekonstruktion an, durch die neue Variablen eingeführt werden.
- Wann ist  $\sigma$  ein Unifikator von zwei Termen  $s, t$ ?
- Geben Sie zwei verschiedene Unifikatoren von  $f(a, X)$  und  $f(Y, Z)$  an. Einer davon soll streng allgemeiner als

– Typeset by FoilTeX –

189

der andere sein. Begründen Sie auch diese Beziehung.

- Bestimmen Sie einen Unifikator von  $f(X_n, f(X_{n-1}, \dots, f(X_0, a) \dots))$  und  $f(f(X_{n-1}, X_{n-1}), f(f(X_{n-2}, X_{n-2}), \dots, f(a, a) \dots))$ .

– Typeset by FoilTeX –

190