

Symbolisches Rechnen
Vorlesung
Wintersemester 2006, 2014
Sommersemester 2021

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

6. April 2021

Einleitung

Symbolisches Rechnen: Beispiele: Zahlen

- numerisches Rechnen mit Maschinenzahlen

```
sqrt 2 + sqrt 3 ==> 3.1462643699419726
```

```
(sqrt 2 + sqrt 3) * (sqrt 2 - sqrt 3) ==> ...
```

- exaktes Rechnen (mit algebraischen Ausdrücken)

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \dots,$$

```
maxima: expand(%)
```

Symbolisches Rechnen: Beisp.: Funktionen

- auf konkreten Daten:

```
let f x = (x+1)^2 in f 3.1 - f 3
```

- auf symbolischen Daten: `diff ((x+1)^2, x)`

- `subst ([x=3], diff ((x+1)^2, x))`

- eigentlich `diff (\x -> (x+1)^2)`

mit `diff :: (R -> R) -> (R -> R)`,

aber da die Mathematiker Funktionen (höhere Ordnung) immer unzweckmäßig bezeichnen, um den Lambda-Kalkül zu vermeiden ...

Symbolisches Rechnen: Motivation

hat weitreichende Anwendungen:

- Lösen von (parametrisierten) *Aufgabenklassen*
(für numerisches Rechnen muß Parameter fixiert werden)
- *exaktes* Lösen von Aufgaben
(numer. R. mit Maschinenzahlen: nur Approximation)
- experimentelle, explorative, exakte Mathematik

ist nützlich im Studium, benutzt und vertieft:

- Mathematik (Analysis, Algebra)
- Algorithmen-Entwurf, -Analyse
- Prinzipien von Programmiersprachen

Überblick

- Zahlen (große, genaue)
- Vektoren (Gitterbasen)
- Polynome
- Terme, Term-Ersetzungs-Systeme
(Anwendung: Differentiation, Vereinfachung)
- Gröbnerbasen (Termination, Vervollständigung)
- Geometrische Konfigurationen
- ... und Beweise (Anwendung von Gröbnerbasen)
- Ausblick: $A = B$, Musik, Logik, Refactoring

Literatur

- Wolfram Koepf: *Computeralgebra*, Springer, 2006. <http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/CA/>
- Hans-Gert Gräbe: *Einführung in das Symbolische Rechnen, Gröbnerbasen und Anwendungen*, Skripte, Universität Leipzig <http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe/skripte/>
- Franz Baader and Tobias Nipkow: *Term Rewriting and All That*, Cambridge, 1998.
<http://www21.in.tum.de/~nipkow/TRaAT/>
- weitere Literatur siehe z.B. <https://portal.risc.jku.at/Members/hemmecke/teaching/ppscs>

Software

- wir benutzen
 - Maxima <http://maxima.sourceforge.net/>
 - FriCAS <https://github.com/fricas/fricas/>
 - Geonext <http://geonext.uni-bayreuth.de/>
 - GHC <http://www.haskell.org/ghc/>
- ist alles im Pool installiert (ssh, tmux, x2go)
- allgemeine Hinweise, auch zum Selbstbauen
<https://imweb.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/cas/>

Beispiel: S.R. und Term-Ersetzung

Regeln für symbolisches Differenzieren (nach t):

$$D(t) \rightarrow 1 \qquad D(\text{constant}) \rightarrow 0$$

$$D(+ (x, y)) \rightarrow + (D(x), D(y))$$

$$D(* (x, y)) \rightarrow + (* (y, D(x)), * (x, D(y)))$$

$$D(- (x, y)) \rightarrow - (D(x), D(y))$$

Robert Floyd 1967, zitiert in: Nachum Dershowitz: 33

Examples of Termination, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.31.9447>

- Korrektheit? Termination? Komplexität?
- Strategie (Auswahl von Regel und Position)?
- ausreichend? angemessen?

Beispiel: Termersetzung (cont.)

```
data E = Zero | One | T
       | Plus E E | Times E E deriving Show
```

```
e :: E
```

```
e = let b = Plus T One in Times b b
```

```
d :: E -> E
```

```
d e = case e of
```

```
  Zero -> Zero ; One -> Zero ; T -> One
```

```
  Plus x y -> Plus (d x) (d y)
```

```
  Times x y ->
```

```
    Plus (Times y (d x)) (Times x (d y))
```

Beispiel: Inverse Symbolic Calculator

- `http://wayback.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html`

zur Bestimmung ganzzahliger Relationen (z.B. zwischen Potenzen einer numerisch gegebenen Zahl)

- `sqrt(2+sqrt(3)) ==> 1.9318516525781366`

`integer relations algorithm, run:`

`K = 1.9318516525781366`

`K satisfies the polynomial, $X^4 - 4X^2 + 1$`

mit LLL-Algorithmus (Lenstra, Lenstra, and Lovasz, 1982), der kurzen Vektor in geeignetem Gitter bestimmt.

Hausaufgaben KW 14, Organisatorisches

1. zum Haskell-Programm zum Symb. Differenzieren:

- füge Syntax und Regel für Quotienten hinzu
- schlage Regeln zur Vereinfachung vor

2. ISC Simple Lookup and Browser sagt für $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$:

```
Mixed constants with 5 operations
```

```
1931851652578136 = 1/2/sin(Pi/12)
```

begründen Sie das (geometrisch oder schriftlich)

3. ein Polynom mit Nullstelle $\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3}$ bestimmen, nachrechnen.

4. Geonext: Satz von Napoleon illustrieren (gleichseitige Dreiecke über den Seiten eines beliebigen Dreiecks)

5. eigener Rechner: `rlwrap` `maxima` installieren,
Rechner im Pool: `ssh` und `tmux` ausprobieren, auch
Management von Sessions, Windows, Panes (split
horizontal, vertikal), vgl. <https://news.ycombinator.com/item?id=26670708>

Organisatorisches:

- in Gitlab.Imn-Projekt einschreiben
- Hausangabe: Wiki anmelden, Issue: diskutieren, ggf. MR
- Prüfungszulassung: Hausaufgaben, autotool
- Prüfung: mündlich, ggf. mit Bezug auf Projekt (= längere Hausaufgabe)
- Hausaufgaben (und Projekt): jeweils 2 Leute