Prof. Dr. H.-G. Gräbe, Uni Leipzig; Prof. Dr. J. Waldmann, HTWK Leipzig
Vorlesung Symbolisches Rechnen, Wintersemester 2014

Aufgabenblatt 11 vom 12. 1.

Zur Besprechung in der Übung am 15. 1.

Ü11-1 Zeigen Sie, dass folgende Erweiterung des Satzes vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden gilt.

Satz 1 *Im Dreieck ABC ist ein Punkt P, der sowohl auf einer der Winkelhalbierenden des Winkels bei A als auch einer der Winkelhalbierenden des Winkels bei B liegt, von den drei Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen gleichweit entfernt.*

Ü11-2 Untersuchen Sie das Polynomsystem F der AGV des *affinen Satzes von Desargue* (siehe VL-Skript Abschnitt 4.1) auf Anwendbarkeit von Gröberbasenberechnungen.

a) Untersuchen Sie zunächst den Satz in speziellen Koordinaten

```
A:Point(0,0); B:Point(0,1); C:Point(1,0);
A1:Point(dx,dy); B1:Point(ex,ey); C1:Point(fx,fy);
```

und zeigen Sie, dass er in diesem Fall mit dem GBasis-Ansatz

```
G:poly_reduced_grobner(polys,vars);
poly_normal_form(con,G,vars);
```

bewiesen werden kann. Wie weit ist F in diesem Fall von einer GBasis entfernt?

b) Untersuchen Sie nun den Satz in allgemeinen Koordinaten

```
A:Point(ax,ay); B:Point(bx,by); C:Point(cx,cy);
A1:Point(dx,dy); B1:Point(ex,ey); C1:Point(fx,fy);
```

Zeigen Sie, dass in diesem Fall

```
G:poly_reduced_grobner(polys,vars);
poly_normal_form(con,G,vars);
```

nicht zu null reduziert, aber

```
poly_normal_form(p*con,G,vars);
```

mit $p =$ `is_collinear`(A, B, C). Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Führen Sie im Fall b) die Schritte des Buchberger-Algorithmus aus.

$\boxed{\textbf{Ü11-3}}$ Untersuchen Sie das Polynomsystem F der AGV der folgenden Umkehrung des *affinen Satzes von Desargue*:

> Ist $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$ und die Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 konkurrent, so ist auch $BC \parallel B_1C_1$.

in speziellen Koordinaten

```
A:Point(0,0); B:Point(0,1); C:Point(1,0);
A1:Point(dx,dy); B1:Point(ex,ey); C1:Point(fx,fy);
```

Zur schriftlichen Korrektur, Abgabe bis 26. 1., Besprechung am 29. 1.

$\boxed{\textbf{S11-1}}$ Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um eine Funktion `is_cl_tangent`(c, l), die einen rationalen Ausdruck zurückgibt, der genau dann verschwindet, wenn die Gerade l den Kreis c berührt.

Formulieren und beweisen Sie damit folgende Aussage als geometrischen Satz vom Gleichungstyp:

Satz 2 (Beispiel Chou 106) *Seien A, B, C und D vier Punkte auf einem Kreis c, E der Schnittpunkt von AB und CD, F der Schnittpunkt von BC und der Parallelen zu AD durch E und G der Berührpunkt der Tangente aus F an den Kreis c. Dann ist $|EF| = |FG|$.*

$\boxed{\textbf{S11-2}}$ Zwei Kreise c_1 und c_2 berühren sich genau dann, wenn ihre Potenzgerade gemeinsame Tangente ist. Ergänzen Sie `geoprover.maxima` auf dieser Basis um eine Funktion `is_cc_tangent`(c_1, c_2) und beweisen Sie damit den folgenden Satz.

Satz 3 (Feuerbach Tangency) *Der Feuerbachkreis des Dreiecks ABC berührt den Inkreis und die drei Ankreise dieses Dreiecks.*