Aufgabenblatt 10 vom 5. 1.

Zur Besprechung in der Übung am 8. 1.

Ü10-1 Zeigen Sie, dass es in einer ebenen Koordinatengeometrie über $K = \mathbb{Q}$ keine gleichseitigen Dreiecke gibt.

Ü10-2 Bestimmen Sie Formeln für die Schnittpunkte zweier Kreise $c = \texttt{Circle}(c_0, c_1, c_2, c_3)$ und $d = \texttt{Circle}(d_0, d_1, d_2, d_3)$ sowie für die Verbindungsgerade dieser beiden Schnittpunkte.

Die Koordinaten dieser Verbindungsgerade lassen sich rational aus den Kreiskoordinaten ausdrücken; für Kreise mit reellen Koordinaten sind diese Geradenkoordinaten also ebenfalls reell, auch wenn die Koordinaten der Schnittpunkte dies nicht mehr sind. Diese Gerade wird als *Potenzgerade* der beiden Kreise bezeichnet.

Geben Sie eine Interpretation der Punkte auf dieser Geraden als geometrischer Ort, wenn sich die beiden Kreis c und d nicht im Reellen schneiden.

Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um ein Funktion $\texttt{radical\_axis}(c, d)$, mit der sich die Potenzgerade zweier Kreise berechnen lässt.

Ü10-3 Zeigen Sie, dass die drei Potenzgeraden $\texttt{radical\_axis}(k_1, k_2)$, $\texttt{radical\_axis}(k_1, k_3)$ und $\texttt{radical\_axis}(k_2, k_3)$ gegebener Kreise k_1, k_2 und k_3 stets konkurrent sind.

Ü10-4 Punkte $P \neq (-1, 0)$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ mit Koordinaten aus k können in der Parameterform

$$P = \left[\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}, \ \frac{2\,r}{r^2 + 1}\right]$$

für $r \in k$ angeschrieben werden (siehe 1. Vorlesung).

Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um eine Funktion $\texttt{circle\_slider}(M, A, r)$, welche nach dieser Formel Punkte auf dem Kreis um M als Zentrum und mit Peripheriepunkt A erzeugt, so dass A dem Parameter $r = 0$ entspricht.

Zur schriftlichen Korrektur, Abgabe bis 19. 1., Besprechung am 22. 1.

S10-1 Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um eine Funktion $\texttt{angle\_sum}(v, w)$, die ein geometrisches Objekt vom Typ `Angle` zurückgibt, welches der Winkelsumme von v und w entspricht.

Formulieren und beweisen Sie damit folgende Aussage als geometrischen Satz vom rationalen konstruktiven Typ:

Satz 1 *Die Winkelsumme im Dreieck beträgt* $180°$.

$\boxed{\textbf{S10-2}}$ Ein wesentlicher Unterschied der Koordinatengeometrien über $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ ist die Existenz isotroper Geraden im Komplexen. Eine Gerade $g = (g_1, g_2, g_3)$ heißt *isotrop*, wenn $g_1^2 + g_2^2 = 0$ gilt. Eine Senkrechte h zu einer solchen Geraden g ist parallel zu g.

Ein Dreieck ABC heißt *isotrop*, wenn alle drei Geraden AB, AC und BC isotrop sind.

(1) Zeigen Sie, dass es über $K = \mathbb{C}$ isotrope Dreiecke gibt, indem Sie ein solches Dreieck angeben.

(2) Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichseitig ist. Was kann man über die Innenwinkelgröße in diesem Dreieck aussagen, was über dessen Innenwinkelsumme?

(3) Untersuchen Sie die Gültigkeit des Satzes vom Höhenschnittpunkt in diesem Dreieck.

(4) Diskutieren Sie den Satz vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in diesem Dreick.