Anmerkungen zur Übung vom 4.12.

Aufgabenblatt 5 vom 17. 11. (Lösungen)

S5-1 Details in `serie-5.txt`
Wir untersuchen, wann für gegebene $a, b \in \mathbb{N}$ (b kein volles Quadrat) die Beziehung

$$\sqrt{a + 2 \cdot \sqrt{b}} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$$

gilt. Quadrieren liefert

$$2 \cdot \sqrt{b} = c + d - a + 2 \cdot \sqrt{c\,d}\,.$$

Dies ist über ganzen Zahlen äquivalent zu

$$a = c + d,\ b = c \cdot d\,. \tag{1}$$

Der genaue Beweis dafür verwendet folgendes

> *Lemma:* Ist $\sqrt{a} = r + \sqrt{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}$ und b kein volles Quadrat, so gilt $r = 0$ und $a = b$.

Beweis: Quadrieren liefert $a - b - r^2 = 2\,r\,\sqrt{b}$, also muss $r\,\sqrt{b}$ eine rationale Zahl sein, was nur für $r = 0$ möglich ist. $\Box$

(1) kann nach c und d aufgelöst werden und ergibt $c, d = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{D}\right)$ mit $D = a^2 - 4\,b$. Damit dies ganzzahlig ist, muss D ein volles Quadrat sein: $\exists u \in \mathbb{N} : a^2 - 4\,b = u^2$.
Mit einer Funktion `issqr(n)`, die testet, ob $n \in \mathbb{N}$ ein volles Quadrat ist (siehe `serie-5.txt`) kann die Lösung wie folgt angeschrieben werden:

```
A(a,b):=sqrt((a+sqrt(a^2-4*b))/2) + sqrt((a-sqrt(a^2-4*b))/2);
Rule(sqrt(a+2*sqrt(b)), A(a,b), issqr(a^2-4*b))(a,b)
```

Eine andere Charakterisierung ergibt sich über Polynomfaktoisierung. Nach dem Satz von Vieta gilt (1) genau dann, wenn $x^2 - a\,x + b$ die beiden Nullstellen c und d hat. Die Regel lässt sich also genau dann anwenden, wenn $x^2 - a\,x + b$ über $\mathbb{Z}$ in zwei Linearfaktoren zerfällt.

S5-2 Da die Ausgangsgleichung invariant unter $x \to x + 2\,\pi$ sowie unter $x \to -x$ ist, kann die Untersuchung auf das Intervall $0 \le x \le \pi$ beschränkt werden. Mit einem Plot und `find_root` (näherungsweise Nullstellenberechnung nach dem Sekantenverfahren) lassen sich Näherungswerte für die zwei Nullstellen in diesem Intervall bestimmen, siehe `serie-5.txt`.

Für eine exakte Lösung kann man mit der Formel $\cos(u) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ die Aufgaben auf die Frage

$$\sin\left(\pi\,\cos(x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\,\sin(x)\right) \tag{2}$$

reduzieren. Nun gilt

$$\sin(a) = \sin(b) \iff (1)\ a = b + 2\,k\,\pi \quad \text{oder} \quad (2)\ a = \pi - b + 2\,k\,\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}\,.$$

In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} (1) &\iff \cos(x) + \sin(x) = \frac{1}{2} + 2\,k \\ (2) &\iff \cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2} + 2\,k \end{aligned}$$

Wegen $|\cos(x) + \sin(x)| < 2$ ergeben sich reelle Lösungen nur für $k = 0$. Da weiterhin mit einer Lösung x der ersten Gleichung $-x$ eine Lösung der zweiten Gleichung ist, kann das Lösen von (2) im Wesentlichen auf das Lösen von $\cos(x) + \sin(x) = \frac{1}{2}$ zurückgeführt werden kann. Hier verfahren wir wie in der Vorlesung:

$$\begin{aligned} & \cos(x) + \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x) = 2\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2} \\ \iff\ & x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\,k\,\pi\,. \end{aligned}$$