Anmerkungen zur Übung vom 13.11.

Aufgabenblatt 2 vom 27. 10.

S2-1 Siehe `serie-2.txt`.

S2-2 Finde wfmA für $R = \{a(a(d,x),y) \to a(x, a(x,y))\}$ über $\Sigma = \{a^2, d^0\}$.
Lösung: $[d] = 0, [a](x,y) = 3^x + y$.
Beweis: Monotonie und Kompatibilität:

$$\begin{aligned} &\text{links: } 3^{3^0+x} + y = 3^{x+1} + y = 3 \cdot 3^x + y,\\ &\text{rechts: } 3^x + (3^x + y) = 2 \cdot 3^x + y. \end{aligned}$$

Es gibt keine wfmA für R, bei der $[a]$ ein Polynom ist.

Wie kommt man darauf?
Vorüberlegung: Menge der R-Normalformen von Grundtermen ist

$$N = \{d, a(d,d), a(d, a(d,d)), \dots\}.$$

Formale Beschreibung durch reguläre Baumgrammatik $\{N \to d, N \to a(d,N)\}$ oder iterierten Kontext $N = C^*[d]$ mit $C[\cdot] = a(d,[\cdot])$. Schreibe $n_k = C^k[d]$.
Wir hoffen, daß R konfluent ist, dann sind Normalformen eindeutig.
Wir betrachten die Funktion G, die $t = a(n_p, n_q)$ auf die Größe der Normalform von t abbildet, also $a(n_p, n_q) \to^* n_{G(p,q)}$.
Z.B. $G(0,0) = 1$ wegen $a(n_0, n_0) = a(d,d) = n_1$;
$G(1,3) = 5$ wegen $a(n_1, n_3) = a(a(d,d), n_3) \to a(d, a(d, n_3))$.
Wir berechnen $G(p,q)$ durch Induktion nach p:

$$\begin{aligned} &a(n_0, n_q) = (a, n_q) = n_{q+1}, \text{ also } G(0,q) = q+1\\ &a(n_{p+1}, n_q) = a(a(d, n_p), n_q) \to a(n_p, a(n_p, n_q)), \text{ also } G(p+1,q) = G(p, G(p,q)). \end{aligned}$$

D.h. $G(1,q) = 2+q, G(2,q) = 4+q, G(3,q) = 8+q, \dots, G(p,q) = 2^p + q$.

Damit haben wir eine Algebra, die ein Modell (für $\approx_R$) ist. Durch leichte Änderung erhalten wir Kompatibilität mit $\to_R$.

Gibt es eine wfmPA (Polynom-Algebra) über $\mathbb{N}$, die kompatibel mit R ist?
Nein, weil die Ableitungslängen von R zu groß sind, wenn wir bei diesen Termen beginnen:
Betrachte $s_k = [a(\cdot, d)]^k(d)$. Dann hat s_k die NF $2^{2^{\cdots}}$ (Höhe k im Exponenten).

Bis zum Erreichen dieser Nf sind auch tatsächlich soviele Schritte notwendig, denn:

Wenn $s \to_R t$, dann $\operatorname{depth}(s) + 1 \geq \operatorname{depth}(t)$ (betrachte die Tiefe des Vorkommens von y links und rechts).

Mit eine wfmPA vom Maximalgrad g kann man aber für Terme der Tiefe j nur Werte $\leq (c^g)^{g \cdots g}$ ausrechnen, $= c^{g^k}$.

$\boxed{\textbf{S2-3}}$ Beweise: es gibt keine wfmA mit Träger $\mathbb{N}$, die kompatibel ist mit $ff \to fgf$.

Korrekte Formulierung: keine wfmA über $(\mathbb{N}, >)$, d.h. mit der Standard-Ordnung. Ansonsten kann man schon etwas hinbasteln, wenn man die (Halb)ordnung wählen darf.

Hilfssatz: Wenn $[\cdot]$ eine wfma über $(\mathbb{N}, >)$, dann $\forall n : [g](n) \geq n$.

Beweis durch Induktion. $[g](0) \geq 0$ trivial, $[g](x+1) > [g](x)$ nach Monotonie.

Dann $[fgf](x) = [f]([g]([f](x))) \geq [f]([f](x))$ im Widerspruch zur Kompatibilität mit $ff \to fgf$.

Ansonsten ... (geht für jedes terminierende TRS R) betrachte irgendeine bijektive Abbildung $e : \mathbb{N} \to \operatorname{Term}(\Sigma)$ (die gibt es, man kann die Terme z.B. der Größe nach aufzählen und die jeweils endlich vielen von einer bestimmten Größe lexikografisch).

Interpretiere Funktionssymole durch $[f](x) = e^{-1}(f(e(x)))$ usw.

Dann definiere $\succ$ auf $\mathbb{N}$ durch $p \succ q$ falls $e(p) \to_R^+ e(q)$.

Beweise, daß diese Algebra wohlfundiert, monoton und kompatibel mit R ist.