

## Aufgabe (Übung oder Klausur) Vervollständigung/Gröbner

### Aufgabenstellung

Autor: Cor Hurkens, Quelle: DMV-Adventskalender, <https://www.mathekalender.de/index.php?page=problem&problemID=19>

Im Weihnachtzirkus jongliert heute der magische Schneemann Schnebulus mit Bällen, Kegeln, Tetraedern und Würfeln. Ab und zu murmelt er dabei ein mächtiges Zauberwort:

- Ebrecedebre verwandelt einen Ball in einen Kegel und ein Tetraeder
- Ibricidibri verwandelt einen Kegel in zwei Tetraeder und einen Würfel
- Obrocodobro verwandelt ein Tetraeder in einen Würfel und drei Bälle
- Ubrucudubru verwandelt einen Würfel in einen Ball und vier Kegel

Wenn Schnebulus ein Zauberwort umdreht, so wirkt es in umgekehrter Richtung:

- erbedecerbE verwandelt einen Kegel und ein Tetraeder in einen Ball
- irbidicirbI verwandelt zwei Tetraeder und einen Würfel in einen Kegel
- orbodocorbO verwandelt einen Würfel und drei Bälle in ein Tetraeder
- urbuducurbU verwandelt einen Ball und vier Kegel in einen Würfel

Momentan jongliert Schnebulus nur mit einem einzigen Kegel (und keinem Ball, keinem Tetraeder und keinem Würfel). Schnebulus würde gerne die folgenden vier Jongliersituationen erreichen:

- B: Mindestens fünf Bälle, aber keine Kegel, Tetraeder oder Würfel
- K: Mindestens fünf Kegel, aber keine Bälle, Tetraeder oder Würfel
- T: Mindestens fünf Tetraeder, aber keine Bälle, Kegel oder Würfel
- W: Mindestens fünf Würfel, aber keine Bälle, Kegel oder Tetraeder

Das Publikum verharrt in atemloser Spannung: Welche dieser Situationen kann Schnebulus rein durch Anwendung seiner Zauberworte erreichen?

### Ansatz I (Termersetzung)

Wir modellieren die Aufgabe als Vervollständigungsproblem für ein Termgleichungssystem  $E$ .

- Signatur  $\{R/4, S/1, Z/0\}$ ,
- der Term  $R(S^x(Z), S^y(Z), S^p(Z), S^q(Z))$  modelliert die Situation mit  $x$  Bällen,  $y$  Kegeln,  $p$  Tetraedern,  $q$  Würfeln,
- „Ibricidibri verwandelt einen Kegel in zwei Tetraeder und einen Würfel“  
wird modelliert durch die Gleichung  $R(b, S(k), t, w) \approx_E R(b, k, S(S(t)), S(w))$ ,

Aufgaben:

- vervollständige das Gleichungssystem  $E$  (bestimme ein äquivalentes konvergentes TRS  $R$ ) bzgl. einer geeigneten Ordnung (evtl. autotool)  
(Bsp: die Ordnung ist die Termgröße, nenne einige kritische Paare)
- Was nützt das? (Wie kann man die Fragen aus der Aufgabenstellung mittels  $R$  beantworten?)

### Ansatz II (Gröbnerbasen)

Wir modellieren die Aufgabe durch Polynomideale.

- Variablen  $b, k, t, w$ ,
- das Monom  $b^x k^y t^p w^q$  modelliert die Situation mit  $x$  Bällen,  $y$  Kegeln,  $p$  Tetraedern,  $q$  Würfeln,
- „Ibricidibri verwandelt einen Kegel in zwei Tetraeder und einen Würfel“  
wird modelliert durch das Polynom  $k - t^2 w$

Aufgaben:

- was nützt das? Sei  $I = \langle P_1, \dots, P_4 \rangle$  das von den Regel-Polynomen erzeugte Ideal. Beweise:  $m' - m \in I$  für Monome  $m, m'$  gdw. die Situation  $m'$  von  $m$  aus erreichbar ist.
- bestimme eine Gröberbasis  $G$  für  $I$ .
- was nützt das? Wie kann man mit Kenntnis von  $G$  die Aufgabe lösen?

### Ansatz III (Nachdenken)

Die Aufgabe ist für Schüler gedacht — also sollte es auch eine theoriefreie Lösung geben.

### Diskussion

Unter o.g. URL gibt es zur Aufgabe ein Bild, das offensichtlich das Jonglieren mit 6 Gegenständen zeigen soll. Das ist an sich möglich, aber keinesfalls sieht es so aus (alle Gegenstände gleichzeitig in der Luft, auf gleichen Winkel-Abständen auf einem Halbkreis). Warum?