

Compilerbau
Vorlesung
Wintersemester 2008, 09, 10, 11

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

31. März 2014

Beispiel

Eingabe (\approx Java):

```
{ int i;  
  float prod;  
  float [20] a;  
  float [20] b;  
  prod = 0;  
  i = 1;  
  do {  
    prod = prod  
      + a[i]*b[i];  
    i = i+1;  
  } while (i <= 20);  
}
```

Ausgabe
(Drei-Adress-Code):

```
L1: prod = 0  
L3: i = 1  
L4: t1 = i * 8  
    t2 = a [ t1 ]  
    t3 = i * 8  
    t4 = b [ t3 ]  
    t5 = t2 * t4  
    prod = prod + t5  
L6: i = i + 1  
L5: if i <= 20 goto L4  
L2:
```

Sprachverarbeitung

- ▶ mit Compiler:
 - ▶ Quellprogramm → Compiler → Zielprogramm
 - ▶ Eingaben → Zielprogramm → Ausgaben
- ▶ mit Interpreter:
 - ▶ Quellprogramm, Eingaben → Interpreter → Ausgaben
- ▶ Mischform:
 - ▶ Quellprogramm → Compiler → Zwischenprogramm
 - ▶ Zwischenprogramm, Eingaben → virtuelle Maschine → Ausgaben

Gemeinsamkeit: syntaxgesteuerte Semantik (Ausführung bzw. Übersetzung)

(weitere) Methoden und Modelle

- ▶ lexikalische Analyse: reguläre Ausdrücke, endliche Automaten
- ▶ syntaktische Analyse: kontextfreie Grammatiken, Kellerautomaten
- ▶ semantische Analyse: Attributgrammatiken
- ▶ Code-Erzeugung: bei Registerzuordnung: Graphenfärbung
- ▶ Semantik-Definition: Inferenz-Systeme,
- ▶ semantische Bereiche als Monaden (Fkt. höherer Ordnung)

Inhalt der Vorlesung

Konzepte von Programmiersprachen

- ▶ Semantik von einfachen (arithmetischen) Ausdrücken
- ▶ lokale Namen, • Unterprogramme (Lambda-Kalkül)
- ▶ Zustandsänderungen (imperative Prog.)
- ▶ Continuations zur Ablaufsteuerung

realisieren durch

- ▶ Interpretation, • Kompilation

Hilfsmittel:

- ▶ Theorie: Inferenzsysteme (f. Auswertung, Typisierung)
- ▶ Praxis: Haskell, Monaden (f. Auswertung, Parser)

Literatur

- ▶ Franklyn Turbak, David Gifford, Mark Sheldon: *Design Concepts in Programming Languages*, MIT Press, 2008.
<http://cs.wellesley.edu/~fturbak/>
- ▶ Guy Steele, Gerald Sussman: *Lambda: The Ultimate Imperative*, MIT AI Lab Memo AIM-353, 1976
(the original 'lambda papers',
<http://library.readscheme.org/page1.html>)
- ▶ Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi and Jeffrey D. Ullman: *Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd edition)* Addison-Wesley, 2007,
<http://dragonbook.stanford.edu/>
- ▶ J. Waldmann: *Das M-Wort in der Compilerbauvorlesung*, Workshop der GI-Fachgruppe Prog. Spr. und Rechnerkonzepte, 2013 <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/13/fg214/>

Anwendungen von Techniken des Compilerbaus

- ▶ Implementierung höherer Programmiersprachen
- ▶ architekturspezifische Optimierungen (Parallelisierung, Speicherhierarchien)
- ▶ Entwurf neuer Architekturen (RISC, spezielle Hardware)
- ▶ Programm-Übersetzungen (Binär-Übersetzer, Hardwaresynthese, Datenbankanfragesprachen)
- ▶ Software-Werkzeuge (z.B. Refaktorisierer)

Organisation der Vorlesung

- ▶ pro Woche eine Vorlesung, eine Übung.
- ▶ in Vorlesung, Übung und Hausaufgaben:
 - ▶ Theorie,
 - ▶ Praxis: Quelltexte (weiter-)schreiben (erst Interpreter, dann Compiler)
- ▶ Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten von Übungsaufgaben
- ▶ Prüfung: Klausur (120 min, keine Hilfsmittel)

Beispiel: Interpreter (I)

arithmetische Ausdrücke:

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp | Times Exp Exp
  deriving ( Show )
ex1 :: Exp
ex1 = Times ( Plus ( Const 1 ) ( Const 2 ) ) ( Const
value :: Exp -> Integer
value x = case x of
  Const i -> i
  Plus x y -> value x + value y
  Times x y -> value x * value y
```

Beispiel: Interpreter (II)

lokale Variablen und Umgebungen:

```
data Exp = ...
          | Let String Exp Exp | Ref String
ex2 :: Exp
ex2 = Let "x" ( Const 3 )
      ( Times ( Ref "x" ) (Ref "x" ) )
type Env = ( String -> Integer )
value :: Env -> Exp -> Integer
value env x = case x of
  Ref n -> env n
  Let n x b -> value ( \ m ->
    if n == m then value env x else env m ) b
  Const i -> i
  Plus x y -> value env x + value env y
  Times x y -> value env x * value env y
```

Übung (Haskell)

- ▶ Wiederholung Haskell
 - ▶ Interpreter/Compiler: `ghci` <http://haskell.org/>
 - ▶ Funktionsaufruf nicht `f (a, b, c+d)`, sondern
`f a b (c+d)`
 - ▶ Konstruktor beginnt mit Großbuchstabe und ist auch eine Funktion
- ▶ Wiederholung funktionale Programmierung/Entwurfsmuster
 - ▶ rekursiver algebraischer Datentyp (ein Typ, mehrere Konstruktoren)
(OO: Kompositum, ein Interface, mehrere Klassen)
 - ▶ rekursive Funktion
- ▶ Wiederholung Pattern Matching:
 - ▶ beginnt mit `case ... of`, dann Zweige
 - ▶ jeder Zweig besteht aus Muster und Folge-Ausdruck
 - ▶ falls das Muster paßt, werden die Mustervariablen gebunden und der Folge-Ausdruck ausgewertet

Übung (Interpreter)

- ▶ Benutzung:
 - ▶ Beispiel für die Verdeckung von Namen bei geschachtelten Let
 - ▶ Beispiel dafür, daß der definierte Name während seiner Definition nicht sichtbar ist
- ▶ Erweiterung:
Verzweigungen mit C-ähnlicher Semantik:
Bedingung ist arithmetischer Ausdruck, verwende 0 als Falsch und alles andere als Wahr.

```
data Exp = ...  
        | If Exp Exp Exp
```

Motivation

- ▶ inferieren = ableiten
- ▶ Inferenzsystem I , Objekt O ,
Eigenschaft $I \vdash O$ (in I gibt es eine Ableitung für O)
- ▶ damit ist I eine *Spezifikation* einer Menge von Objekten
- ▶ man ignoriert die *Implementierung* (= das Finden von Ableitungen)
- ▶ Anwendungen im Compilerbau:
Auswertung von Programmen, Typisierung von Programmen

Definition

ein *Inferenz-System* I besteht aus

- ▶ Regeln (besteht aus Prämissen, Konklusion)
Schreibweise $\frac{P_1, \dots, P_n}{K}$
- ▶ Axiomen (= Regeln ohne Prämissen)

eine *Ableitung* für F bzgl. I ist ein Baum:

- ▶ jeder Knoten ist mit einer Formel beschriftet
- ▶ jeder Knoten (mit Vorgängern) entspricht Regel von I
- ▶ Wurzel ist mit F beschriftet

Schreibweise: $I \vdash F$

Inferenz-Systeme (Beispiel 1)

- ▶ Grundbereich = Zahlenpaare $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- ▶ Axiom:

$$\overline{(13, 5)}$$

- ▶ Regel-Schemata:

$$\frac{(x, y)}{(x - y, y)}, \quad \frac{(x, y)}{(x, y - x)}$$

kann man $(1, 1)$ ableiten? $(-1, 5)$? $(2, 4)$?

Inferenz-Systeme (Beispiel 2)

- ▶ Grundbereich: Zeichenketten aus $\{0, 1\}^*$
- ▶ Axiom:

$\overline{01}$

- ▶ Regel-Schemata (für jedes u, v):

$$\frac{0u, v0}{u1v}, \quad \frac{1u, v1}{u0v}, \quad \frac{u}{\text{reverse}(u)}$$

Leite 11001 ab. Wieviele Wörter der Länge k sind ableitbar?

Inferenz-Systeme (Beispiel 3)

- ▶ Grundbereich: endliche Folgen von ganzen Zahlen
- ▶ Axiome: jede konstante Folge (Bsp. [3, 3, 3, 3])
- ▶ Schlußregeln:

- ▶ $\text{swap}_k: \frac{[\dots, x_k, x_{k+1}, \dots]}{[\dots, x_{k+1} + 1, x_k - 1, \dots]}$

- ▶ $\text{rotate: } \frac{[x_1, \dots, x_n]}{[x_2, \dots, x_n, x_1]}$

Aufgaben: • Ableitungen für [5, 3, 1, 3], [7, 7, 1]

- ▶ jede Folge der Form [z, 0, ..., 0] ist ableitbar
- ▶ Invarianten, [5, 3, 3] ist nicht ableitbar

praktische Realisierung: <http://www.siteswap.org/> und
HTWK-Hochschulsport

Inferenz von Werten

- ▶ Grundbereich: Aussagen der Form $\text{wert}(p, z)$ mit $p \in \text{Exp}$, $z \in \mathbb{Z}$

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp
         | Times Exp Exp
```

- ▶ Axiome: $\text{wert}(\text{Const } z, z)$

- ▶ Regeln:

$$\frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Plus } X \ Y, a + b)}, \quad \frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Times } X \ Y, a \cdot b)}, \dots$$

Umgebungen (Spezifikation)

- ▶ Grundbereich: Aussagen der Form $\text{wert}(E, p, z)$
(in Umgebung E hat Programm p den Wert z)
Umgebungen konstruiert aus \emptyset und $E[v := b]$
- ▶ Regeln für Operatoren $\frac{\text{wert}(E, X, a), \text{wert}(E, Y, b)}{\text{wert}(E, \text{Plus}XY, a + b)}, \dots$
- ▶ Regeln für Umgebungen
 $\frac{}{\text{wert}(E[v := b], v, b)}$, $\frac{\text{wert}(E, v', b')}{\text{wert}(E[v := b], v', b')}$ für $v \neq v'$
- ▶ Regeln für Bindung: $\frac{\text{wert}(E, X, b), \text{wert}(E[v := b], Y, c)}{\text{wert}(E, \text{let } v = X \text{ in } Y, c)}$

Umgebungen (Implementierung)

Umgebung ist (partielle) Funktion von Name nach Wert

Realisierungen: `type Env = String -> Integer`

Operationen:

- ▶ `empty :: Env` leere Umgebung
- ▶ `lookup :: Env -> String -> Integer`
Notation: $e(x)$
- ▶ `extend :: Env -> String -> Integer -> Env`
Notation: $e[v := z]$

Beispiel

`lookup (extend (extend empty "x" 3) "y" 4) "x"`

entspricht $(\emptyset[x := 3][y := 4])x$

Aussagenlogische Resolution

Formel $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee D)$ in konjunktiver Normalform dargestellt als $\{\{A, \neg B, \neg C\}, \{C, D\}\}$

(Formel = Menge von Klauseln, Klausel = Menge von Literalen, Literal = Variable oder negierte Variable)

folgendes Inferenzsystem heißt *Resolution*:

- ▶ Axiome: Klauselmenge einer Formel,
- ▶ Regel:
 - ▶ Prämissen: Klauseln K_1, K_2 mit $v \in K_1, \neg v \in K_2$
 - ▶ Konklusion: $(K_1 \setminus \{v\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg v\})$

Eigenschaft (Korrektheit): wenn $\frac{K_1, K_2}{K}$, dann $K_1 \wedge K_2 \rightarrow K$.

Resolution (Vollständigkeit)

die Formel (Klauselmenge) ist nicht erfüllbar \iff die leere Klausel ist durch Resolution ableitbar.

Bsp: $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$

Beweispläne:

- ▶ \Rightarrow : Gegeben ist die nicht erfüllbare Formel. Gesucht ist eine Ableitung für die leere Klausel. Methode: Induktion nach Anzahl der in der Formel vorkommenden Variablen.
- ▶ \Leftarrow : Gegeben ist die Ableitung der leeren Klausel. Zu zeigen ist die Nichterfüllbarkeit der Formel. Methode: Induktion nach Höhe des Ableitungsbaumes.

Semantische Bereiche

bisher: Wert eines Ausdrucks ist Zahl.

jetzt erweitern (Motivation: if-then-else mit richtigem Typ):

```
data Val = ValInt Int
         | ValBool Bool
```

Dann brauchen wir auch

- ▶ `data Val = ... | ValErr String`
- ▶ vernünftige Notation (Kombinatoren) zur Einsparung von Fallunterscheidungen bei Verkettung von Rechnungen

```
with_int  :: Val -> (Int -> Val) -> Val
```

Continuations

Programmablauf-Abstraktion durch Continuations:

Definition:

```
with_int  :: Val -> (Int  -> Val) -> Val
with_int v k = case v of
  ValInt i -> k i
  _ -> ValErr "expected ValInt"
```

Benutzung:

```
value env x = case x of
  Plus l r ->
    with_int ( value env l ) $ \ i ->
    with_int ( value env r ) $ \ j ->
    ValInt ( i + j )
```

Aufgabe: if/then/else mit `with_bool`

Beispiele

- ▶ in verschiedenen Prog.-Sprachen gibt es verschiedene Formen von Unterprogrammen:
Prozedur, sog. Funktion, Methode, Operator, Delegate, anonymes Unterprogramm
- ▶ allgemeinstes Modell: Kalkül der anonymen Funktionen (Lambda-Kalkül),

Interpreter mit Funktionen

abstrakte Syntax:

```
data Exp = ...  
  | Abs { formal :: Name , body :: Exp }  
  | App { rator  :: Exp , rand  :: Exp }
```

konkrete Syntax:

```
let { f = \ x -> x * x } in f (f 3)
```

konkrete Syntax (Alternative):

```
let { f x = x * x } in f (f 3)
```

Semantik

erweitere den Bereich der Werte:

```
data Val = ... | ValFun ( Value -> Value )
```

erweitere Interpreter:

```
value :: Env -> Exp -> Val
```

```
value env x = case x of
```

```
  ...
```

```
  Abs { } ->
```

```
  App { } ->
```

mit Hilfsfunktion

```
with_fun :: Val -> ...
```

Testfall (1)

```
let { x = 4 }  
in let { f = \ y -> x * y }  
    in let { x = 5 }  
        in f x
```

Let und Lambda

- ▶ `let { x = A } in Q`
kann übersetzt werden in
`(\ x -> Q) A`
- ▶ `let { x = a , y = b } in Q`
wird übersetzt in ...
- ▶ beachte: das ist nicht das `let` aus Haskell

Mehrstellige Funktionen

... simulieren durch einstellige:

- ▶ mehrstellige Abstraktion:

$$\lambda x y z . z \rightarrow B := \lambda x . \rightarrow (\lambda y . \rightarrow (\lambda z . \rightarrow B))$$

- ▶ mehrstellige Applikation:

$$f P Q R := ((f P) Q) R$$

(die Applikation ist links-assoziativ)

- ▶ der Typ einer mehrstelligen Funktion:

$$T1 \rightarrow T2 \rightarrow T3 \rightarrow T4 := \\ T1 \rightarrow (T2 \rightarrow (T3 \rightarrow T4))$$

(der Typ-Pfeil ist rechts-assoziativ)

Closures

bisher:

```
eval env x = case x of ...
  Abs n b -> ValFun $ \ v ->
    eval (extend env n v) b
  App f a ->
    with_fun ( eval env f ) $ \ g ->
      with_val ( eval env a ) $ \ v -> g v
```

alternativ: die Umgebung von Abs in die Zukunft transportieren:

```
eval env x = case x of ...
  Abs n b -> ValClos env n b
  App f a -> ...
```

Rekursion?

- ▶ Das geht nicht, und soll auch nicht gehen:

```
let { x = 1 + x } in x
```

- ▶ aber das hätten wir doch gern:

```
let { f = \ x -> if x > 0  
          then x * f (x -1) else 1  
      } in f 5
```

(nächste Woche)

- ▶ aber auch mit nicht rekursiven Funktionen kann man interessante Programme schreiben:

Testfall (2)

```
let { t f x = f (f x) }  
in  let { s x = x + 1 }  
    in  t t t t s 0
```

- ▶ auf dem Papier den Wert bestimmen
- ▶ mit Haskell ausrechnen
- ▶ mit selbstgebaudem Interpreter ausrechnen

Motivation

1. intensionale Modellierung von Funktionen,
 - ▶ intensional: Fkt. ist Berechnungsvorschrift, Programm
 - ▶ (extensional: Fkt. ist Menge v. geordneten Paaren)
2. Notation mit gebundenen (lokalen) Variablen, wie in
 - ▶ Analysis: $\int x^2 dx, \sum_{k=0}^n k^2$
 - ▶ Logik: $\forall x \in A : \forall y \in B : P(x, y)$
 - ▶ Programmierung: `static int foo (int x) { ... }`

Der Lambda-Kalkül

(Alonzo Church, 1936 ... Henk Barendregt, 1984 ...)
ist der Kalkül für Funktionen mit benannten Variablen
die wesentliche Operation ist das Anwenden einer Funktion:

$$(\lambda x.B)A \rightarrow B[x := A]$$

Beispiel: $(\lambda x.x * x)(3 + 2) \rightarrow (3 + 2) * (3 + 2)$

Im reinen Lambda-Kalkül gibt es *nur* Funktionen—keine Zahlen

Lambda-Terme

Menge Λ der Lambda-Terme (mit Variablen aus einer Menge V):

- ▶ (Variable) wenn $x \in V$, dann $x \in \Lambda$
- ▶ (Applikation) wenn $F \in \Lambda$, $A \in \Lambda$, dann $(FA) \in \Lambda$
- ▶ (Abstraktion) wenn $x \in V$, $B \in \Lambda$, dann $(\lambda x.B) \in \Lambda$

das sind also Lambda-Terme:

$x, (\lambda x.x), ((xz)(yz)), (\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))))))$

verkürzte Notation

- ▶ Applikation als links-assoziativ auffassen:

$$(\dots ((FA_1)A_2) \dots A_n) \sim FA_1A_2 \dots A_n$$

Beispiel: $((xz)(yz)) \sim xz(yz)$

- ▶ geschachtelte Abstraktionen unter ein Lambda schreiben:

$$\lambda x_1. (\lambda x_2. \dots (\lambda x_n. B) \dots) \sim \lambda x_1 x_2 \dots x_n. B$$

Beispiel: $\lambda x. \lambda y. \lambda z. B \sim \lambda xyz. B$

- ▶ die vorigen Abkürzungen sind sinnvoll, denn $(\lambda x_1 \dots x_n. B)A_1 \dots A_n$ verhält sich wie eine Anwendung einer mehrstelligen Funktion.

Gebundene Variablen

Def: Menge $FV(t)$ der *freien Variablen* von $t \in \Lambda$

- ▶ $FV(x) = \{x\}$
- ▶ $FV(FA) = FV(F) \cup FV(A)$
- ▶ $FV(\lambda x.B) = FV(B) \setminus \{x\}$

Def: Menge $BV(t)$ der *gebundenen Variablen* von $t \in \Lambda$

- ▶ $BV(x) = \emptyset$
- ▶
- ▶

Substitution

$A[x := N]$ ist (eine Kopie von) A , wobei jedes freie Vorkommen von x durch N ersetzt ist.

Definition durch strukturelle Induktion

- ▶ A ist Variable (2 Fälle)
- ▶ A ist Applikation
- ▶ A ist Abstraktion
 - ▶ $(\lambda x.B)[x := N] = \lambda x.B$
 - ▶ $(\lambda y.B)[x := N] = \lambda y.(B[x := N])$,
falls $x \neq y$ und $BV(B) \cap FV(N) = \emptyset$

Das falsche Binden von Variablen

Diese Programme sind *nicht* äquivalent:

```
int f (int y) {
    int x = y + 3; int sum = 0;
    for (int y = 0; y<4; y++)
        { sum = sum + x    ; }
    return sum;
}

int g (int y) {
                                int sum = 0;
    for (int y = 0; y<4; y++)
        { sum = sum + (y+3); }
    return sum;
}
```

Gebundene Umbenennungen

Relation \rightarrow_α auf Λ :

▶ Axiom: $(\lambda x.B) \rightarrow_\alpha (\lambda y.B[x := y])$ falls $y \notin V(B)$.

▶ Abschluß unter Kontext:

$$\frac{F \rightarrow_\alpha F'}{(FA) \rightarrow_\alpha (F'A)}, \quad \frac{A \rightarrow_\alpha A'}{(FA) \rightarrow_\alpha (FA')}, \quad \frac{B \rightarrow_\alpha B'}{\lambda x.B \rightarrow_\alpha \lambda x.B'}$$

\equiv_α ist die durch \rightarrow_α definierte Äquivalenzrelation
(die transitive, reflexive und symmetrische Hülle von \rightarrow_α)

Bsp. $\lambda x.\lambda x.x \equiv_\alpha \lambda y.\lambda x.x$, $\lambda x.\lambda x.x \not\equiv_\alpha \lambda y.\lambda x.y$

wir betrachten ab jetzt Λ / \equiv_α

(d. h., Äquivalenzklassen von Termen)

(vgl. rationale Zahlen als Äquivalenzklassen von Paaren)

Ableitungen

Absicht: Relation \rightarrow_β auf Λ / \equiv_α (Ein-Schritt-Ersetzung):

- ▶ Axiom: $(\lambda x. B)A \rightarrow_\beta B[x := A]$
ein Term der Form $(\lambda x. B)A$ heißt *Redex* (= reducible expression)

- ▶ Abschluß unter Kontext:

$$\frac{F \rightarrow_\beta F'}{(FA) \rightarrow_\beta (F'A)}, \quad \frac{A \rightarrow_\beta A'}{(FA) \rightarrow_\beta (FA')}, \quad \frac{B \rightarrow_\beta B'}{\lambda x. B \rightarrow_\beta \lambda x. B'}$$

Vorsicht:

$$(\lambda x. (\lambda y. xyx))(yy) \rightarrow_\beta (\lambda y. yx)[x := (yy)] \stackrel{?}{=} \lambda y. y(yy)$$

das freie y wird fälschlich gebunden

die Substitution ist nicht ausführbar, man muß vorher lokal umbenennen

Eigenschaften der Reduktion

→ auf Λ ist

- ▶ konfluent

$$\forall A, B, C \in \Lambda : A \rightarrow_{\beta}^* B \wedge A \rightarrow_{\beta}^* C \Rightarrow \exists D \in \Lambda : B \rightarrow_{\beta}^* D \wedge C \rightarrow_{\beta}^* D$$

- ▶ (Folgerung: jeder Term hat höchstens eine Normalform)
- ▶ aber nicht terminierend (es gibt Terme mit unendlichen Ableitungen)
 $W = \lambda x.xx, \Omega = WW.$
- ▶ es gibt Terme mit Normalform und unendlichen Ableitungen, K/Ω mit $K = \lambda xy.x, I = \lambda x.x$

Daten als Funktionen

Simulation von Daten (Tupel)
durch Funktionen (Lambda-Ausdrücke):

- ▶ Konstruktor: $\langle D_1, \dots, D_k \rangle \Rightarrow \lambda s. s D_1 \dots D_k$
- ▶ Selektoren: $s_i \Rightarrow \lambda t. t(\lambda d_1 \dots d_k. d_i)$

dann gilt $s_i \langle D_1, \dots, D_k \rangle \rightarrow_{\beta}^* D_i$

Anwendungen:

- ▶ Auflösung simultaner Rekursion
- ▶ Modellierung von Zahlen

Lambda-Kalkül als universelles Modell

- ▶ Wahrheitswerte:
 $\text{True} = \lambda xy.x$, $\text{False} = \lambda xy.y$
(damit läßt sich if-then-else leicht aufschreiben)
- ▶ natürliche Zahlen:
 $0 = \lambda x.x$; $(n + 1) = \langle \text{False}, n \rangle$
(damit kann man leicht $x > 0$ testen)
- ▶ Rekursion?

Fixpunkt-Kombinatoren

- ▶ Definition: $\Theta = (\lambda xy.(y(xxy)))(\lambda xy.(y(xxy)))$
- ▶ Satz: $\Theta f \rightarrow_{\beta} f(\Theta f)$, d. h. Θf ist Fixpunkt von f
- ▶ d.h. Θ ist *Fixpunkt-Kombinator*, (T wegen Turing)
- ▶ Folgerung: im Lambda-Kalkül kann man beliebige Wiederholung (Schachtelung) von Rechnungen beschreiben

Anwendung:

```
f = \ g x -> if x==0 then 1 else x * g(x-1)
```

Beispiel: $f(\lambda z.z)7 = 7 \cdot (\lambda z.z)6 = 7 \cdot 6$, $f(\lambda z.z)0 = 1$;

$\Theta f 7 \rightarrow_{\beta}^* 7 \cdot (f(\Theta f)6) \rightarrow_{\beta}^* 7 \cdot (6 \cdot (f(\Theta f)5)) \rightarrow_{\beta}^* \dots$

Lambda-Berechenbarkeit

Satz: (Church, Turing)

Menge der Turing-berechenbaren Funktionen
(Zahlen als Wörter auf Band)

= Menge der while-berechenbaren Funktionen
(Zahlen als Registerinhalte)

= Menge der Lambda-berechenbaren Funktionen
(Zahlen als Lambda-Ausdrücke)

Übung Lambda-Kalkül

- ▶ Konstruktor und Selektoren für Paare
- ▶ Test, ob der Nachfolger von 0 gleich 0 ist
(mit λ -kodierte Zahlen)
- ▶ Fakultät mittels Θ
(mit „echten“ Zahlen und Operationen)

Motivation

Das ging bisher gar nicht:

```
let { f = \ x -> if x > 0
      then x * f (x - 1) else 1
    } in f 5
```

Lösung 1: benutze Fixpunktkombinator

```
let { Theta = ... } in
let { f = Theta ( \ g -> \ x -> if x > 0
      then x * g (x - 1) else 1 )
    } in f 5
```

Lösung 2 (später): realisiere Fixpunktberechnung im Interpreter
(neuer AST-Knotentyp)

Existenz von Fixpunkten

Fixpunkt von $f :: C \rightarrow C$ ist $x :: C$ mit $fx = x$.

Existenz? Eindeutigkeit? Konstruktion?

Satz: Wenn C *pointed CPO* und f *stetig*,
dann besitzt f genau einen kleinsten Fixpunkt.

- ▶ CPO = complete partial order = vollständige Halbordnung
- ▶ complete = jede monotone Folge besitzt Supremum (= kleinste obere Schranke)
- ▶ pointed: C hat kleinstes Element \perp
- ▶ stetig: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ und für monotone Folgen $[x_0, x_1, \dots]$ gilt: $f(\sup[x_0, x_1, \dots]) = \sup[f(x_0), f(x_1), \dots]$

Dann $\text{fix}(f) = \sup[\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots]$

Beispiele f. Halbordnungen, CPOs

Halbordnung? pointed? complete?

- ▶ \leq auf \mathbb{N}
- ▶ \leq auf $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- ▶ \leq auf $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$
- ▶ \leq auf $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1\}$
- ▶ Teilbarkeit auf \mathbb{N}
- ▶ Präfix-Relation auf Σ^*
- ▶ $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid (x_1 \leq x_2) \vee (y_1 \leq y_2)\}$ auf \mathbb{R}^2
- ▶ $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)\}$ auf \mathbb{R}^2
- ▶ identische Relation id_M auf einer beliebigen Menge M
- ▶ $\{(\perp, x) \mid x \in M_\perp\} \cup \text{id}_M$ auf $M_\perp := \{\perp\} \cup M$

Funktionen als CPO

- ▶ Menge der partiellen Funktionen von B nach B :
 $C = (B \multimap B)$
- ▶ partielle Funktion $f : B \multimap B$
entspricht totaler Funktion $f : B \rightarrow B_{\perp}$
- ▶ C geordnet durch $f \leq g \iff \forall x \in B : f(x) \leq g(x)$,
wobei \leq die vorhin definierte CPO auf B_{\perp}
- ▶ $f \leq g$ bedeutet: g ist Verfeinerung von f
- ▶ Das Bottom-Element von C ist die überall undefinierte Funktion. (diese heißt auch \perp)

Funktionen als CPO, Beispiel

der Operator $F =$

```
\ g -> ( \ x -> if (x==0) then 0
           else 2 + g (x - 1) )
```

ist stetig auf $(\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N})$ (Beispiele nachrechnen!)

Iterative Berechnung des Fixpunktes:

$\perp = \emptyset$ überall undefiniert

$F\perp = \{(0, 0)\}$ sonst \perp

$F(F\perp) = \{(0, 0), (1, 2)\}$ sonst \perp

$F^3\perp = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$ sonst \perp

Fixpunktberechnung im Interpreter

Erweiterung der abstrakten Syntax:

```
data Exp = ... | Rec Name Exp
```

Beispiel

App

```
(Rec g (Abs v (if v==0 then 0 else 2 + g(v-1))))  
5
```

Bedeutung: `Rec x B` bezeichnet den Fixpunkt von $(\lambda x. B)$

Definition der Semantik:

```
value (E, Rec x B) =  
  fixpoint $ \ v -> value (E[x:=v], B)
```

Fixpunkte und Laziness

Fixpunkte existieren in pointed CPOs.

- ▶ Zahlen: nicht pointed
(arithmetische Operatoren sind strikt)
- ▶ Funktionen: partiell \Rightarrow pointed
(\perp ist überall undefinierte Funktion)
- ▶ Daten (Listen, Bäume usw.): pointed:
(Konstruktoren sind nicht strikt)

Beispiele in Haskell:

```
fix f = f (fix f)
xs = fix $ \ zs -> 1 : zs
ys = fix $ \ zs ->
    0 : 1 : zipWith (+) zs (tail zs)
```

Simultane Rekursion: letrec

Beispiel (aus: D. Hofstadter, Gödel Escher Bach)

```
letrec { f = \ x -> if x == 0 then 1
          else x - g(f(x-1))
        , g = \ x -> if x == 0 then 0
          else x - f(g(x-1))
      } in f 15
```

Bastelaufgabe: für welche x gilt $f(x) \neq g(x)$?

weitere Beispiele:

```
letrec { x = 3 + 4 , y = x * x } in x - y
letrec { f = \ x -> .. f (x-1) } in f 3
```

letrec nach rec

mittels der Lambda-Ausdrücke für select und tuple

```
LetRec [(n1,x1), .. (nk,xk)] y
=> ( rec t
      ( let n1 = select1 t
          ...
          nk = selectk t
          in tuple x1 .. xk ) )
( \ n1 .. nk -> y )
```

Übung Fixpunkte

- ▶ Limes der Folge $F^k(\perp)$ für

```
F h = \ x -> if x > 23 then x - 11
           else h (h (x + 14))
```

- ▶ Limes der Folge $F^k(\perp)$ für

```
F h = \ x -> if x > 10 then x + 11
           else h (2 * x - 8)
```

- ▶ gegenseitige Rekursion (f, g) als Fixpunkt (`Rec`) einer geeigneten Funktion (benutzt Tupel)

- ▶ (Ergänzung zu Lambda-Kalkül:)
Turing-Fixpunkt-Kombinator mit

<http://joerg.endrullis.de/lambdaCalculator/>

Motivation

bisherige Programme sind nebenwirkungsfrei, das ist nicht immer erwünscht:

- ▶ direktes Rechnen auf von-Neumann-Maschine:
Änderungen im Hauptspeicher
- ▶ direkte Modellierung von Prozessen mit
Zustandsänderungen ((endl.) Automaten)

Dazu muß semantischer Bereich geändert werden.

- ▶ **bisher:** Val , **jetzt:** $State \rightarrow (State, Val)$
(dabei ist (A, B) die Notation für $A \times B$)

Semantik von (Teil-)Programmen ist Zustandsänderung.

Speicher

```
import qualified Data.Map as M

http://hackage.haskell.org/packages/archive/containers/0.5.0.0/doc/html/Data-Map-Lazy.html

newtype Addr = Addr Int
type Store = M.Map Addr Val
newtype Action a =
    Action ( Store -> ( Store, a ) )
```

spezifische Aktionen:

```
new :: Val -> Action Addr
get :: Addr -> Action Val
put :: Addr -> Val -> Action ()
```

Aktion ausführen, Resultat liefern:

```
run :: Store -> Action a -> a
```

Auswertung von Ausdrücken

Ausdrücke (mit Nebenwirkungen):

```
data Exp = ...  
    | New Exp | Get Exp | Put Exp Exp
```

Resultattyp des Interpreters ändern:

```
value      :: Env -> Exp -> Val  
evaluate   :: Env -> Exp -> Action Val
```

semantischen Bereich erweitern:

```
data Val = ...  
    | ValAddr Addr  
    | ValFun ( Val -> Action Val )
```

Aufruf des Interpreters:

```
run Store.empty $ evaluate undefined $ ...
```

Änderung der Hilfsfunktionen

bisher:

```
with_int :: Val -> ( Int -> Val ) -> Val
with_int v k = case v of
  ValInt i -> k i
  v -> ValErr "ValInt expected"
```

jetzt:

```
with_int :: Action Val
  -> ( Int -> Action Val ) -> Action Val
with_int m k = m >>= \ v -> case v of ...
```

Hauptprogramm muß kaum geändert werden (!)

Speicher-Aktionen als Monade

generische Aktionen/Verknüpfungen:

- ▶ nichts tun (return), • nacheinander (bind, >>=)

```
class Monad m where
  return :: a -> m a
  (>>=)  :: m a
         -> (a -> m b) -- Continuation
         -> m b

instance Monad Action where
  return x = Action $ \ s -> ( s, x )
  Action a >>= f = Action $ \ s -> ...
```

Variablen?

in unserem Modell haben wir:

- ▶ veränderliche Speicherstellen,
- ▶ aber immer noch unveränderliche „Variablen“ (lokale Namen)

⇒ der Wert eines Namens kann eine Speicherstelle sein, aber dann immer dieselbe.

Imperative Programmierung

es fehlen noch wesentliche Operatoren:

- ▶ Nacheinanderausführung (Sequenz)
- ▶ Wiederholung (Schleife)

diese kann man:

- ▶ simulieren (durch `let`)
- ▶ als neue AST-Knoten realisieren (Übung)

Rekursion

mehrere Möglichkeiten zur Realisierung

- ▶ mit Fixpunkt-Kombinator (bekannt)
- ▶ in der Gastsprache des Interpreters
(dabei neu: Fixpunkte von Aktionen)
- ▶ (neu:) simulieren (in der interpretierten Sprache)
durch Benutzung des Speichers

Rekursion (semantisch)

bisher:

```
fix :: ( a -> a ) -> a
fix f = f ( fix f )
```

jetzt:

```
import Control.Monad.Fix
class MonadFix m where
    mfix :: ( a -> m a ) -> m a

instance MonadFix Action where
mfix f = Action $ \ s0 ->
    let Action a = f v
        ( s1, v ) = a s0
    in ( s1, v )
```

Rekursion (operational)

Idee: eine Speicherstelle anlegen und als Vorwärtsreferenz auf das Resultat der Rekursion benutzen

```
Rec n (Abs x b) ==>  
  a := new 42  
  put a ( \ x -> let { n = get a } in b )  
  get a
```

Speicher—Übung

Fakultät imperativ:

```
let { fak = \ n ->
      { a := new 1 ;
        while ( n > 0 )
          { a := a * n ; n := n - 1; }
        return a;
      }
  } in fak 5
```

1. Schleife durch Rekursion ersetzen und Sequenz durch

let:

```
fak = let { a = new 1 }
      in Rec f ( \ n -> ... )
```

2. Syntaxbaumtyp erweitern um Knoten für Sequenz und Schleife

Die Konstruktorklasse Monad

Definition:

```
class Monad m where
  return  :: a -> m a
  ( >>= ) :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

Benutzung der Methoden:

```
evaluate e l >>= \ a ->
evaluate e r >>= \ b ->
return ( a + b )
```

Do-Notation für Monaden

```
evaluate e l >>= \ a ->  
    evaluate e r >>= \ b ->  
        return ( a + b )
```

do-Notation (explizit geklammert):

```
do { a <- evaluate e l  
    ; b <- evaluate e r  
    ; return ( a + b )  
}
```

do-Notation (implizit geklammert):

```
do a <- evaluate e l  
   b <- evaluate e r  
   return ( a + b )
```

Haskell: implizite Klammerung nach let, do, case, where

Beispiele für Monaden

- ▶ Aktionen mit Speicheränderung (vorige Woche)
`Action (Store -> (Store, a))`
- ▶ Aktionen mit Welt-Änderung: `IO a`
- ▶ Transaktionen (Software Transactional Memory) `STM a`
- ▶ Aktionen, die möglicherweise fehlschlagen:
`data Maybe a = Nothing | Just a`
- ▶ Nichtdeterminismus (eine Liste von Resultaten): `[a]`
- ▶ Parser-Monade (nächste Woche)

Die IO-Monade

```
data IO a -- abstract
instance Monad IO -- eingebaut

readFile :: FilePath -> IO String
putStrLn :: String -> IO ()
```

Alle „Funktionen“, deren Resultat von der Außenwelt (Systemzustand) abhängt, haben Resultattyp `IO ...`, sie sind tatsächlich *Aktionen*.

Am Typ einer Funktion erkennt man ihre möglichen Wirkungen bzw. deren garantierte Abwesenheit.

```
main :: IO ()
main = do
    cs <- readFile "foo.bar" ; putStrLn cs
```

Die Maybe-Monade

```
data Maybe a = Nothing | Just a
instance Monad Maybe where ...
```

Beispiel-Anwendung:

```
case ( evaluate e l ) of
  Nothing -> Nothing
  Just a   -> case ( evaluate e r ) of
    Nothing -> Nothing
    Just b   -> Just ( a + b )
```

mittels der Monad-Instanz von Maybe:

```
evaluate e l >>= \ a ->
  evaluate e r >>= \ b ->
    return ( a + b)
```

Ü: dasselbe mit do-Notation

List als Monade

```
instance Monad [] where
  return = \ x -> [x]
  m >>= f = case m of
    []      -> []
    x : xs  -> f x ++ ( xs >>= f )
```

Beispiel:

```
do a <- [ 1 .. 4 ]
   b <- [ 2 .. 3 ]
   return ( a * b )
```

Gesetze für Monaden

das Wort *Monade* ist abgeleitet von *Monoid*,
für jede Implementierung muß `return` und `>=>` folgende
Eigenschaften erfüllen:

- ▶ Grundbereich: Funktionen des Typs $a \rightarrow m\ b$
- ▶ Verküpfung (Kleisli-Komposition)

$(\Rightarrow) ::$

$(a \rightarrow m\ b) \rightarrow (b \rightarrow m\ c) \rightarrow (a \rightarrow m\ c)$

$(f \Rightarrow g) = \lambda x \rightarrow (f\ x \gg= \lambda y \rightarrow g\ y)$

- ▶ `return` ist (links- und rechts-)neutral für `>=>`
- ▶ `>=>` ist assoziativ

Beispiele? Beweise?

Monaden: Zusammenfassung

- ▶ verwendet zur Abstraktion vom Programmablauf (das Semikolon, das Anweisungen verknüpft, kann undefiniert werden)
- ▶ Notation `do { x <- foo ; bar ; .. }` ähnlich zu imperativen Programmen
- ▶ Grundlagen: Kategorien-Theorie (ca. 1960), in Funktl. Prog. seit ca. 1990 <http://homepages.inf.ed.ac.uk/wadler/topics/monads.html>
- ▶ in anderen Sprachen: *Workflows* in F#, LINQ-Syntax in C#

Datentyp für Parser

```
data Parser c a =  
    Parser ( [c] -> [ (a, [c]) ] )
```

- ▶ über Eingabestrom von Zeichen (Token) c ,
- ▶ mit Resultattyp a ,
- ▶ nichtdeterministisch (List).

Beispiel-Parser, Aufrufen mit:

```
parse :: Parser c a -> [c] -> [(a, [c])]  
parse (Parser f) w = f w
```

Elementare Parser (I)

```
-- | das nächste Token
next :: Parser c c
next = Parser $ \ toks -> case toks of
  [] -> []
  ( t : ts ) -> [ ( t, ts ) ]
-- | das Ende des Tokenstroms
eof :: Parser c ()
eof = Parser $ \ toks -> case toks of
  [] -> [ ( (), [] ) ]
  _ -> []
-- | niemals erfolgreich
reject :: Parser c a
reject = Parser $ \ toks -> []
```

Monadisches Verketteten von Parsern

Definition:

```
instance Monad ( Parser c ) where
    return x = Parser $ \ s ->
        return ( x, s )
    Parser f >>= g = Parser $ \ s -> do
        ( a, t ) <- f s
        let Parser h = g a
            h t
```

beachte: das *return/do* gehört zur List-Monade

Anwendungsbeispiel:

```
p :: Parser c (c,c)
p = do x <- next ; y <- next ; return (x,y)
```

Elementare Parser (II)

```
satisfy :: ( c -> Bool ) -> Parser c c
satisfy p = do
  x <- next
  if p x then return x else reject
```

```
expect :: Eq c => c -> Parser c c
expect c = satisfy ( == c )
```

```
ziffer :: Parser Char Integer
ziffer = do
  c <- satisfy Data.Char.isDigit
  return $ fromIntegral
          $ fromEnum c - fromEnum '0'
```

Kombinatoren für Parser (I)

- ▶ Folge (and then) (ist $\gg=$ aus der Monade)
- ▶ Auswahl (or)

```
( <|> ) :: Parser c a -> Parser c a -> Parser c a
Parser f <|> Parser g = Parser $ \ s -> f s ++ g s
```

- ▶ Wiederholung (beliebig viele)

```
many, many1 :: Parser c a -> Parser c [a]
many p = many1 p <|> return []
many1 p = do x <- p; xs <- many p; return $ x : xs
```

```
zahl :: Parser Char Integer = do
  zs <- many1 ziffer
  return $ foldl ( \ a z -> 10*a+z ) 0 zs
```

Kombinator-Parser und Grammatiken

Grammatik mit Regeln $S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \epsilon$ entspricht

```
s :: Parser Char ()
s = do { expect 'a' ; s ; expect 'b' ; s }
      <|> return ()
```

Anwendung: `exec "abab" $ do s ; eof`

Robuste Parser-Bibliotheken

Designfragen:

- ▶ asymmetrisches `<|>`
- ▶ Nichtdeterminismus einschränken
- ▶ Fehlermeldungen (Quelltextposition)

Beispiel: Parsec (Autor: Daan Leijen)

<http://www.haskell.org/haskellwiki/Parsec>

Asymmetrische Komposition

gemeinsam:

```
(<|>) :: Parser c a -> Parser c a  
      -> Parser c a
```

```
Parser p <|> Parser q = Parser $ \ s -> ...
```

- ▶ **symmetrisch:** `p s ++ q s`
- ▶ **asymmetrisch:** `if null p s then q s else p s`

Anwendung: `many` liefert nur maximal mögliche Wiederholung
(nicht auch alle kürzeren)

Nichtdeterminismus einschränken

- ▶ Nichtdeterminismus = Berechnungsbaum = Backtracking
- ▶ asymmetrisches $p <|> q$: probiere erst p , dann q
- ▶ häufiger Fall: p lehnt „sofort“ ab

Festlegung (in Parsec): wenn p wenigstens ein Zeichen verbraucht, dann wird q nicht benutzt (d. h. p muß erfolgreich sein)

Backtracking dann nur durch `try p <|> q`

Fehlermeldungen

- ▶ Fehler = Position im Eingabestrom, bei der es „nicht weitergeht“
- ▶ und auch durch Backtracking keine Fortsetzung gefunden wird
- ▶ Fehlermeldung enthält:
 - ▶ Position
 - ▶ Inhalt (Zeichen) der Position
 - ▶ Menge der Zeichen mit Fortsetzung

Pretty-Printing (I)

John Hughes's and Simon Peyton Jones's Pretty Printer
Combinators

Based on *The Design of a Pretty-printing Library in Advanced
Functional Programming*, Johan Jeuring and Erik Meijer (eds),
LNCS 925

[http://hackage.haskell.org/packages/archive/pretty/
1.0.1.0/doc/html/Text-PrettyPrint-HughesPJ.html](http://hackage.haskell.org/packages/archive/pretty/1.0.1.0/doc/html/Text-PrettyPrint-HughesPJ.html)

Pretty-Printing (II)

- ▶ `data Doc` **abstrakter Dokumententyp**, repräsentiert Textblöcke

- ▶ **Konstruktoren:**

```
text :: String -> Doc
```

- ▶ **Kombinatoren:**

```
vcat          :: [ Doc ] -> Doc -- vertikal
```

```
hcat, hsep    :: [ Doc ] -> Doc -- horizontal
```

- ▶ **Ausgabe:** `render :: Doc -> String`

Definition

(alles nach: Turbak/Gifford Ch. 17.9)

CPS-Transformation (continuation passing style):

- ▶ original: Funktion gibt Wert zurück

```
f == (abs (x y) (let ( ... ) v))
```

- ▶ cps: Funktion erhält zusätzliches Argument, das ist eine *Fortsetzung* (continuation), die den Wert verarbeitet:

```
f-cps == (abs (x y k) (let ( ... ) (k v)))
```

aus `g (f 3 2)` wird `f-cps 3 2 g-cps`

Motivation

Funktionsaufrufe in CPS-Programm kehren nie zurück, können also als Sprünge implementiert werden!

CPS als einheitlicher Mechanismus für

- ▶ Linearisierung (sequentielle Anordnung von primitiven Operationen)
- ▶ Ablaufsteuerung (Schleifen, nicht lokale Sprünge)
- ▶ Unterprogramme (Übergabe von Argumenten und Resultat)
- ▶ Unterprogramme mit mehreren Resultaten

CPS für Linearisierung

$(a + b) * (c + d)$ wird übersetzt (linearisiert) in

```
( \ top ->  
  plus a b $ \ x ->  
  plus c d $ \ y ->  
  mal  x y top  
) ( \ z -> z )
```

$\text{plus } x \ y \ k = k \ (x + y)$

$\text{mal } x \ y \ k = k \ (x * y)$

später tatsächlich als Programmtransformation (Kompilation)

CPS für Resultat-Tupel

wie modelliert man Funktion mit mehreren Rückgabewerten?

- ▶ benutze Datentyp Tupel (Paar):

$$f : A \rightarrow (B, C)$$

- ▶ benutze Continuation:

$$f/cps : A \rightarrow (B \rightarrow C \rightarrow D) \rightarrow D$$

CPS/Tupel-Beispiel

erweiterter Euklidischer Algorithmus:

```
prop_egcd x y =  
  let (p,q) = egcd x y  
  in (p*x + q*y) == gcd x y
```

```
egcd :: Integer -> Integer  
      -> ( Integer, Integer )
```

```
egcd x y = if y == 0 then ???  
           else let (d,m) = divMod x y  
                  (p,q) = egcd y m  
                  in ???
```

vervollständige, übersetze in CPS

CPS für Ablaufsteuerung

Beispiel label/jump

```
1 + label exit (2 * (3 - (4 + jump exit 5)))
```

Vergleiche:

- ▶ `label <name>` **deklariert Exception-Handler**
- ▶ `jump <name>` **springt zum Handler**

Semantik für CPS

Semantik von Ausdruck x in Umgebung E
ist Funktion von Continuation nach Wert (Action)

```
value (E, label L B) = \ k ->
  value (E[L/k], B) k
value (E, jump L B) = \ k ->
  value (E, L) $ \ k' ->
  value (E, B) k'
```

Beispiel 1:

```
value (E, label x x)
  = \ k -> value (E[x/k], x) k
  = \ k -> k k
```

Beispiel 2

```
value (E, jump (label x x) (label y y))
= \ k ->
  value (E, label x x) $ \ k' ->
  value (E, label y y) k'
= \ k ->
```

Semantik

semantischer Bereich:

```
type Continuation a = a -> Action Val
data CPS a
  = CPS ( Continuation a -> Action Val )
evaluate :: Env -> Exp -> CPS Val
```

Plan:

- ▶ **Syntax:** Label, Jump, Parser
- ▶ **Semantik:**
 - ▶ Verkettung durch `>>=` aus instance Monad CPS
 - ▶ Einbetten von Action Val durch lift
 - ▶ evaluate für bestehende Sprache (CBV)
 - ▶ evaluate für label und jump

CPS als Monade

```
feed :: CPS a -> ( a -> Action Val )  
      -> Action Val
```

```
feed ( CPS s ) c = s c
```

```
feed ( s >>= f ) c =  
  feed s ( \ x -> feed ( f x ) c )
```

```
feed ( return x ) c = c x
```

```
lift :: Action a -> CPS a
```

Beispiele/Übung KW 50: Parser

- ▶ Parser für `\x y z -> ...`, benutze `foldr`
- ▶ Parser für `let { f x y = ... } in ...`
- ▶ Parser für `let { a = b ; c = d ; ... } in ..`
- ▶ `Text.Parsec.Combinator.notFollowedBy` zur Erkennung von Schlüsselwörtern
- ▶ Ziffern in Bezeichnern

Beispiele/Übung KW 50: CPS

Rekursion (bzw. Schleifen) mittels Label/Jump
(und ohne Rec oder Fixpunkt-Kombinator)

folgende Beispiele sind aus Turbak/Gifford, DCPL, 9.4.2

- ▶ Beschreibe die Auswertung (Datei `ex4.hs`)

```
let { d = \ f -> \ x -> f (f x) }  
in let { f = label l ( \ x -> jump l x ) }  
    in f d ( \ x -> x + 1 ) 0
```

- ▶ `jump (label x x) (label y y)`

- ▶ Ersetze `undefined`, so daß `f x = x!` (Datei `ex5.hs`)

```
let { triple x y z = \ s -> s x y z  
    ; fst t = t ( \ x y z -> x )  
    ; snd t = t ( \ x y z -> y )  
    ; thd t = t ( \ x y z -> z )  
    ; f x = let { p = label start undefined  
                ; loop = fst p ; n = snd p ; a =  
                } in if 0 == n then a  
                else loop (triple loop (n -  
    } in f 5
```

Grundlagen

Typ = statische Semantik

(Information über mögliches Programm-Verhalten, erhalten ohne Programm-Ausführung)

formale Beschreibung:

- ▶ P : Menge der Ausdrücke (Programme)
- ▶ T : Menge der Typen
- ▶ Aussagen $p :: t$ (für $p \in P, t \in T$)
 - ▶ prüfen oder
 - ▶ herleiten (inferieren)

Inferenzsystem für Typen (Syntax)

- ▶ Grundbereich: Aussagen der Form $E \vdash X : T$
(in Umgebung E hat Ausdruck X den Typ T)
- ▶ Menge der Typen:
 - ▶ primitiv: Int, Bool
 - ▶ zusammengesetzt:
 - ▶ Funktion $T_1 \rightarrow T_2$
 - ▶ Verweistyp Ref T
 - ▶ Tupel (T_1, \dots, T_n) , einschl. $n = 0$
- ▶ Umgebung bildet Namen auf Typen ab

Inferenzsystem für Typen (Semantik)

- ▶ Axiome f. Literale: $E \vdash \text{Zahl-Literal} : \text{Int}, \dots$
- ▶ Regel für prim. Operationen:
$$\frac{E \vdash X : \text{Int}, E \vdash Y : \text{Int}}{E \vdash (X + Y) : \text{Int}}, \dots$$
- ▶ Abstraktion/Applikation: ...
- ▶ Binden/Benutzen von Bindungen: ...

hierbei (vorläufige) Design-Entscheidungen:

- ▶ Typ eines Ausdrucks wird inferiert
- ▶ Typ eines Bezeichners wird ...
 - ▶ in Abstraktion: deklariert
 - ▶ in Let: inferiert

Inferenz für Let

(alles ganz analog zu Auswertung von Ausdrücken)

▶ Regeln für Umgebungen

- ▶ $E[v := t] \vdash v : t$
- ▶ $\frac{E \vdash v' : t'}{E[v := t] \vdash v' : t'}$ für $v \neq v'$

▶ Regeln für Bindung:

$$\frac{E \vdash X : s, \quad E[v := s] \vdash Y : t}{E \vdash \text{let } v = X \text{ in } Y : t}$$

Applikation und Abstraktion

- ▶ Applikation:

$$\frac{E \vdash F : T_1 \rightarrow T_2, \quad E \vdash A : T_1}{E \vdash (FA) : T_2}$$

vergleiche mit *modus ponens*

- ▶ Abstraktion (mit deklariertem Typ der Variablen)

$$\frac{E[v := T_1] \vdash X : T_2}{E \vdash (\lambda(v :: T_1)X) : T_1 \rightarrow T_2}$$

Eigenschaften des Typsystems

Wir haben hier den *einfach getypten Lambda-Kalkül* nachgebaut:

- ▶ jedes Programm hat höchstens einen Typ
- ▶ nicht jedes Programm hat einen Typ.
Der *Y-Kombinator* $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ hat keinen Typ
- ▶ jedes getypte Programm terminiert
(Begründung: bei jeder Applikation FA ist der Typ von FA kleiner als der Typ von F)

Übung: typisiere $t \ t \ t \ t \ \text{succ} \ 0$ mit

$\text{succ} = \lambda x \rightarrow x + 1$ und $t = \lambda f \ x \rightarrow f \ (f \ x)$

Motivation

ungetypt:

```
let { t = \ f x -> f (f x)
      ; s = \ x -> x + 1
      } in (t t s) 0
```

einfach getypt nur so möglich:

```
let { t2 = \ (f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int))
             (x :: Int -> Int) -> f (f x)
      ; t1 = \ (f :: Int -> Int) (x :: Int) -> f (f x)
      ; s = \ (x :: Int) -> x + 1
      } in (t2 t1 s) 0
```

wie besser?

Typ-Argumente (Beispiel)

Typ-Abstraktion, Typ-Applikation:

```
let { t = \ <t>
      -> \ ( f : t -> t ) ->
          \ ( x : t ) ->
              f ( f x )
      ; s = \ ( x : int ) -> x + 1
      }
in  ((t <int -> int>) (t <int>)) s) 0
```

zur Laufzeit werden die Abstraktionen und Typ-Applikationen *ignoriert*

Typ-Argumente (Regeln)

neuer Typ $\forall t. T$,

neue Ausdrücke mit Inferenz-Regeln:

- ▶ Typ-Abstraktion: erzeugt parametrischen Typ

$$\frac{E \vdash \dots}{E \vdash \lambda t \rightarrow X : \dots}$$

- ▶ Typ-Applikation: instantiiert param. Typ

$$\frac{E \vdash F : \dots}{E \vdash F \langle T_2 \rangle : \dots}$$

Ü: Vergleich Typ-Applikation mit expliziter Instantiierung von polymorphen Methoden in C#

Inferenz allgemeingültige Formeln

Grundbereich: aussagenlogische Formeln (mit Variablen und Implikation)

Axiom-Schemata:

$$\overline{X \rightarrow (Y \rightarrow X)}, \overline{X \rightarrow (Y \rightarrow Z)} \rightarrow \overline{((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))}$$

Regel-Schema (*modus ponens*): $\frac{X \rightarrow Y, X}{Y}$

Beobachtungen/Fragen:

- ▶ Übung (autotool): Leite $p \rightarrow p$ ab.
- ▶ (*Korrektheit*): jede ableitbare Formel ist allgemeingültig
- ▶ (*Vollständigkeit*): sind alle allgemeingültigen Formeln (in dieser Signatur) ableitbar?

Typen und Daten

- ▶ bisher: Funktionen von Daten nach Daten

`\ (x :: Int) -> x + 1`

- ▶ heute: Funktionen von Typ nach Daten

`\ (t :: Type) -> \ (x :: t) -> x`

- ▶ Funktionen von Typ nach Typ (ML, Haskell, Java, C#)

`\ (t :: Type) -> List t`

- ▶ Funktionen von Daten nach Typ (*dependent types*)

`\ (t :: Typ) (n :: Int) -> Array t n`

Sprachen: Cayenne, Coq, Agda

Eigenschaften: Typkorrektheit i. A. nicht entscheidbar,
d. h. Programmierer muß Beweis hinschreiben.

Motivation

Bisher: Typ-Deklarationspflicht für Variablen in Lambda.
scheint sachlich nicht nötig. In vielen Beispielen kann man die Typen einfach rekonstruieren:

```
let { t = \ f x -> f (f x)
      ; s = \ x -> x + 1
      } in t s 0
```

Diesen Vorgang automatisieren!
(zunächst für einfaches (nicht polymorphes) Typsystem)

Realisierung mit Constraints

Inferenz für Aussagen der Form $E \vdash X : (T, C)$

- ▶ E : Umgebung (Name \rightarrow Typ)
- ▶ X : Ausdruck (Exp)
- ▶ T : Typ
- ▶ C : Menge von Typ-Constraints

wobei

- ▶ Menge der Typen T erweitert um Variablen
- ▶ Constraint: Paar von Typen (T_1, T_2)
- ▶ Lösung eines Constraints: Substitution σ mit $T_1\sigma = T_2\sigma$

Inferenzregeln f. Rekonstruktion (Plan)

Plan:

- ▶ Aussage $E \vdash X : (T, C)$ ableiten,
- ▶ dann C lösen (allgemeinsten Unifikator σ bestimmen)
- ▶ dann ist $T\sigma$ der (allgemeinste) Typ von X (in Umgebung E)

Für (fast) jeden Teilausdruck eine eigene („frische“) Typvariable ansetzen, Beziehungen zwischen Typen durch Constraints ausdrücken.

Inferenzregeln? Implementierung? — Testfall:

```
\ f g x y ->  
  if (f x y) then (x+1) else (g (f x True))
```

Inferenzregeln f. Rekonstruktion

- ▶ primitive Operationen (Beispiel)

$$\frac{E \vdash X_1 : (T_1, C_1), \quad E \vdash X_2 : (T_2, C_2)}{E \vdash X_1 + X_2 : (\text{Int}, \{T_1 = \text{Int}, T_2 = \text{Int}\} \cup C_1 \cup C_2)}$$

- ▶ Applikation

$$\frac{E \vdash F : (T_1, C_1), \quad E \vdash A : (T_2, C_2)}{E \vdash (FA) : \dots}$$

- ▶ Abstraktion

$$\frac{\dots}{E \vdash \lambda x. B : \dots}$$

- ▶ (Ü) Konstanten, Variablen, if/then/else

Substitutionen (Definition)

- ▶ Signatur $\Sigma = \Sigma_0 \cup \dots \cup \Sigma_k$,
- ▶ $\text{Term}(\Sigma, V)$ ist kleinste Menge T mit $V \subseteq T$ und $\forall 0 \leq i \leq k, f \in \Sigma_i, t_1 \in T, \dots, t_i \in T : f(t_1, \dots, t_i) \in T$.
(hier Anwendung für Terme, die Typen beschreiben)
- ▶ Substitution: partielle Abbildung $\sigma : V \rightarrow \text{Term}(\Sigma, V)$,
Definitionsbereich: $\text{dom } \sigma$, Bildbereich: $\text{img } \sigma$.
- ▶ Substitution σ auf Term t anwenden: $t\sigma$
- ▶ σ heißt *pur*, wenn kein $v \in \text{dom } \sigma$ als Teilterm in $\text{img } \sigma$ vorkommt.

Substitutionen: Produkt

Produkt von Substitutionen: $t(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (t\sigma_1)\sigma_2$

Beispiel 1:

$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto a\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$.

Beispiel 2 (nachrechnen!):

$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto X\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2$

Eigenschaften:

- ▶ σ pur \Rightarrow σ idempotent: $\sigma \circ \sigma = \sigma$
- ▶ σ_1 pur \wedge σ_2 pur impliziert nicht $\sigma_1 \circ \sigma_2$ pur

Implementierung:

```
import Data.Map
type Substitution = Map Identifier Term
times :: Substitution -> Substitution -> Substitution
```

Substitutionen: Ordnung

Substitution σ_1 ist *allgemeiner als* Substitution σ_2 :

$$\sigma_1 \prec \sigma_2 \iff \exists \tau : \sigma_1 \circ \tau = \sigma_2$$

Beispiele:

- ▶ $\{X \mapsto Y\} \prec \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$,
- ▶ $\{X \mapsto Y\} \prec \{Y \mapsto X\}$,
- ▶ $\{Y \mapsto X\} \prec \{X \mapsto Y\}$.

Eigenschaften

- ▶ Relation \prec ist Prä-Ordnung (\dots, \dots , aber nicht \dots)
- ▶ Die durch \prec erzeugte Äquivalenzrelation ist die \sim

Unifikation—Definition

Unifikationsproblem

- ▶ Eingabe: Terme $t_1, t_2 \in \text{Term}(\Sigma, V)$
- ▶ Ausgabe: ein allgemeinsten Unifikator (mgu): Substitution σ mit $t_1\sigma = t_2\sigma$.

(allgemeinst: infimum bzgl. \prec)

Satz: jedes Unifikationsproblem ist

- ▶ entweder gar nicht
- ▶ oder bis auf Umbenennung eindeutig

lösbar.

Unifikation—Algorithmus

$\text{mgu}(s, t)$ nach Fallunterscheidung

- ▶ s ist Variable: ...
- ▶ t ist Variable: symmetrisch
- ▶ $s = (s_1 \rightarrow s_2)$ und $t = (t_1 \rightarrow t_2)$: ...

$\text{mgu} :: \text{Term} \rightarrow \text{Term} \rightarrow \text{Maybe Substitution}$

Unifikation—Komplexität

Bemerkungen:

- ▶ gegebene Implementierung ist korrekt, übersichtlich, aber nicht effizient,
- ▶ (Ü) es gibt Unif.-Probl. mit exponentiell großer Lösung,
- ▶ eine komprimierte Darstellung davon kann man aber in Polynomialzeit ausrechnen.

Bsp: Signatur $\{f/2, a/0\}$,

unifiziere $f(X_1, f(X_2, f(X_3, f(X_4, a))))$ mit

$f(f(X_2, X_2), f(f(X_3, X_3), f(f(X_4, X_4), f(a, a))))$

Rekonstruktion polymorpher Typen

... ist im Allgemeinen nicht möglich:

Joe Wells: *Typability and Type Checking in System F Are Equivalent and Undecidable*, *Annals of Pure and Applied Logic* 98 (1998) 111–156, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.6.6483>

übliche Einschränkung (ML, Haskell): *let-Polymorphismus*:
Typ-Abstraktionen nur für let-gebundene Bezeichner:

```
let { t = \ f x -> f(f x) ; s = \ x -> x+1 }  
in t t s 0
```

folgendes ist dann nicht typisierbar (t ist monomorph):

```
( \ t -> let { s = \ x -> x+1 } in t t s 0 )  
  ( \ f x -> f (f x) )
```

Implementierung

let-Polymorphie, Hindley/Damas/Milner

- ▶ Inferenzsystem ähnlich zu Rekonstruktion monomorpher Typen mit Aussagen der Form $E \vdash X : (T, C)$
- ▶ Umgebung E ist jetzt partielle Abbildung von Name nach Typschema (nicht wie bisher: nach Typ).
- ▶ Bei Typinferenz für let-gebundene Bezeichner wird über die freien Typvariablen generalisiert.
- ▶ Dazu Teil-Constraint-Systeme lokal lösen.

Beispiel

```
let { c = ... }  
in let { g = \ f x -> f (if b c x) } in ..
```

Transformationen/Ziel

- ▶ continuation passing (Programmablauf explizit)
- ▶ closure conversion (alle Umgebungen explizit)
- ▶ lifting (alle Unterprogramme global)
- ▶ Registervergabe (alle Argumente in Registern)

Ziel: maschinen(nahes) Programm mit

- ▶ globalen (Register-)Variablen (keine lokalen)
- ▶ Sprüngen (kein return)
- ▶ automatischer Speicherbereinigung

CPS-Transformation: Spezifikation

(als Schritt im Compiler)

- ▶ Eingabe: Ausdruck X , Ausgabe: Ausdruck Y
- ▶ Semantik: Wert von $X = \text{Wert von } Y(\lambda v.v)$
- ▶ Syntax:
 - ▶ $X \in \text{Exp}$ (fast) beliebig,
 - ▶ $Y \in \text{Exp/CPS}$ stark eingeschränkt:
 - ▶ keine geschachtelten Applikationen
 - ▶ Argumente von Applikationen und Operationen ($+$, $*$, $>$) sind Variablen oder Literale

CPS-Transformation: Zielsyntax

drei Teilmengen von `data Exp`:

```
Exp_CPS ==> App Identifier Exp_Value^*
          | If Exp_Value Exp_CPS Exp_CPS
          | Let Identifier Exp_Letable Exp_CPS
Exp_Value ==> Literal | Identifier
Exp_Letable ==> Literal
              | Abs Identifier Exp_CPS
              | Exp_Value Op Exp_Value
```

Übung 1: Übersetze von `Exp` nach `Exp_CPS`:

```
(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
```

Übung 2: wegen CPS brauchen wir tatsächlich:

```
\ k -> k ((0 - (b * b)) + (4 * (a * c)))
```

Beispiel

Lösung 1:

$(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))$

==>

```
let { t.3 = b * b } in
  let { t.2 = 0 - t.3 } in
    let { t.5 = a * c } in
      let { t.4 = 4 * t.5 } in
        let { t.1 = t.2 + t.4 } in
          t.1
```

Lösung 2:

```
\ k -> let ... in k t.1
```

CPS-Transf. f. Abstraktion, Applikation

vgl. Sect. 6 in: Gordon Plotkin: *Call-by-name, call-by-value and the λ -calculus*, Th. Comp. Sci. 1(2) 1975, 125–159

[http://dx.doi.org/10.1016/0304-3975\(75\)90017-1](http://dx.doi.org/10.1016/0304-3975(75)90017-1),

<http://homepages.inf.ed.ac.uk/gdp/>

- ▶ $\text{CPS}(v) = \lambda k.kv$
- ▶ $\text{CPS}(FA) = \lambda k.(\text{CPS}(F)(\lambda f.\text{CPS}(A)(\lambda a.fak)))$
- ▶ $\text{CPS}(\lambda x.B) = \lambda k.k(\lambda x.\text{CPS}(B))$

dabei sind k, f, a frische Namen.

Bsp. $\text{CPS}(\lambda x.9) = \lambda k_2.k_2(\lambda x.\text{CPS}(9)) = \lambda k_2.k_2(\lambda xk_1.k_19)$,

$\text{CPS}((\lambda x.9)8) =$

$\lambda k_4.(\lambda k_2.k_2(\lambda xk_1.k_19))(\lambda f.((\lambda k_3.k_38)(\lambda a.fak_4)))$

Ü: Normalform von $\text{CPS}((\lambda x.9)8)(\lambda z.z)$

Namen

Bei der Übersetzung werden „frische“ Variablennamen benötigt
(= die im Eingangsprogramm nicht vorkommen).

```
module Control.Monad.State where
data State s a = State ( s -> ( a, s ) )
get  :: State s s ; put  :: s -> State ()
evalState :: State s a -> s -> a
```

```
fresh :: State Int String
fresh = do k <- get ; put (k+1)
        return $ "f." ++ show k
```

```
type Transform a = State Int a
cps  :: Exp -> Transform Exp
```

Teilweise Auswertung

- ▶ Interpreter (bisher): komplette Auswertung
(Continuations sind Funktionen, werden angewendet)
- ▶ CPS-Transformator (heute): gar keine Auswertung,
(Continuations sind Ausdrücke)
- ▶ gemischter Transformator: benutzt sowohl
 - ▶ Continuations als Ausdrücke (der Zielsprache)
 - ▶ als auch Continuations als Funktionen (der Gastsprache)(compile time evaluation, partial evaluation)

Partial Evaluation

- ▶ **bisher: Applikation zur Laufzeit**
(Continuation bezeichnet durch `Ref k :: Exp`)

```
transform :: Exp -> Transform ExpCPS
transform x = case x of
  ConstInteger i -> do
    k<-fresh; return $ Abs k (App (Ref k) x)
```

- ▶ **jetzt: Applikation während der Transformation**
(Continuation bezeichnet durch `k :: Cont`)

```
type Cont = ExpValue -> Transform ExpCPS
transform :: Exp -> (Cont->Transform ExpCPS)
transform x = case x of
  ConstInteger i -> \ k -> k x
```

Umrechnung zw. Continuations (I)

```
id2mc :: Name -> ExpValue -> Transform ExpCPS
id2mc c = \ v-> return $ MultiApp (Ref c) [v]
```

Anwendung bei Abstraktion

```
Abs x b -> \ k -> do
  c <- fresh "k"
  b' <- cps b ( id2mc c )
  k $ MultiAbs [ x, c ] b' -- Ansatz
```

tatsächlich statt letzter Zeile:

```
fresh_let (return $ MultiAbs [f,c] b') k
```

mit Hilfsfunktion

```
fresh_let t k = do
  f <- fresh "l" ; a <- t
  b <- k ( Ref f ) ; return $ Let f a b
```

Umrechnung zw. Continuations (II)

```
mc2exp :: Cont -> Transform ExpCPS
mc2exp k = do
  e <- fresh "e" ; out <- k (Ref e)
  return $ MultiAbs [e] out
```

Anwendung:

```
App f a -> \ k ->
  cps f $ \ f' ->
  cps a $ \ a' -> do -- Ansatz:
    x <- mc2exp k; return $ MultiApp f' [a', x]
```

tatsächlich statt Ansatz:

```
fresh_let ( mc2exp k ) $ \ x ->
  return $ MultiApp f' [ a' , x ]
```

Vergleich CPS-Interpreter/Transformator

Wiederholung CPS-Interpreter:

```
type Cont = Val -> Action Val
eval :: Env -> Exp -> Cont -> Action Val
eval env x = \ k -> case x of
  ConstInt i -> ...
  Plus a b -> ...
```

CPS-Transformator:

```
type Cont = ExpValue -> Transform ExpCPS
cps :: Exp -> Cont -> Transform ExpCPS
cps x = \ m -> case x of
  ConstInt i -> ...
  Plus a b -> ...
```

Übung CPS-Transformation

- ▶ Transformationsregeln für Ref, App, Abs, Let nachvollziehen (im Vergleich zu CPS-Interpreter)
- ▶ Transformationsregeln für if/then/else, new/put/get hinzufügen
- ▶ anwenden auf eine rekursive Funktion (z. B. Fakultät), wobei Rekursion durch Zeiger auf Abstraktion realisiert wird

Übung Tupel

- ▶ `data Val = .. | ValTuple [Val]`
- ▶ **abstrakte Syntax:**
 - Konstruktor:** `data Exp = ... | Tuple [Exp]`
 - Selektor:** `data Exp = ... | Nth Int Exp`
(der Index ist eine Konstante!)
- ▶ konkrete Syntax (Parser, Printer)
- ▶ Semantik: Inferenzregeln und Implementierung für:
Auswertung, Typisierung, Typrekonstruktion

Motivation

(Literatur: DCPL 17.10) — Beispiel:

```
let { linear = \ a -> \ x -> a * x + 1
      ; f = linear 2 ; g = linear 3
    }
in f 4 * g 5
```

beachte nicht lokale Variablen: ($\lambda x \rightarrow \dots a \dots$)

- ▶ Semantik-Definition (Interpreter) benutzt Umgebung
- ▶ Transformation (closure conversion, environment conversion) (im Compiler) macht Umgebungen explizit.

Spezifikation

closure conversion:

- ▶ Eingabe: Programm P
- ▶ Ausgabe: äquivalentes Programm P' , bei dem alle Abstraktionen *geschlossen* sind
- ▶ zusätzlich: P in CPS $\Rightarrow P'$ in CPS

geschlossen: alle Variablen sind lokal

Ansatz:

- ▶ Werte der benötigten nicht lokalen Variablen
 \Rightarrow zusätzliche(s) Argument(e) der Abstraktion
- ▶ auch Applikationen entsprechend ändern

closure passing style

- ▶ Umgebung = Tupel der Werte der benötigten nicht lokalen Variablen
- ▶ Closure = Paar aus Code und Umgebung
realisiert als Tupel $(\text{Code}, \underbrace{W_1, \dots, W_n}_{\text{Umgebung}})$

```
\ x -> a * x + 1
```

```
==>
```

```
\ clo x ->
```

```
  let { a = nth clo 1 } in a * x + 1
```

Closure-Konstruktion?

Komplette Übersetzung des Beispiels?

Transformation

```
CLC[ \ i_1 .. i_n -> b ] =  
  (tuple ( \ clo i_1 .. i_n ->  
          let { v_1 = nth 1 clo ; .. }  
          in  CLC[b]  
          ) v_1 .. )
```

wobei $\{v_1, \dots\} = \text{freie Variablen in } (\lambda i_1 \dots i_n \rightarrow b)$

```
CLC[ (f a_1 .. a_n) ] =  
  let { clo = CLC[f]  
        ; code = nth 0 clo  
      } in  code clo CLC[a_1] .. CLC[a_n]
```

- ▶ für alle anderen Fälle: strukturelle Rekursion
- ▶ zur Erhaltung der CPS-Form: Spezialfall bei `let`

Spezifikation

(lambda) lifting:

- ▶ Eingabe: Programm P , bei dem alle Abstraktionen geschlossen sind
- ▶ Ausgabe: äquivalentes Programm P' , bei dem alle Abstraktionen (geschlossen und) global sind

Motivation: in Maschinencode gibt es nur globale Sprungziele (CPS-Transformation: Unterprogramme kehren nie zurück \Rightarrow globale Sprünge)

Realisierung

nach closure conversion sind alle Abstraktionen geschlossen, diese müssen nur noch aufgesammelt und eindeutig benannt werden.

```
let { g1 = \ v1 .. vn -> b1
      ...
      ; gk = \ v1 .. vn -> bk
    } in b
```

dann in b_1, \dots, b_k, b keine Abstraktionen gestattet

- ▶ Zustandsmonade zur Namenserverzeugung (g_1, g_2, \dots)
- ▶ Ausgabemonade (`WriterT`) zum Aufsammeln
- ▶ g_1, \dots, g_k dürften nun sogar rekursiv sein (sich gegenseitig aufrufen)

Lambda-Lifting (Plan)

um ein Programm zu erhalten, bei dem alle Abstraktionen global sind:

- ▶ bisher: closure conversion + lifting:
(verwendet Tupel)
- ▶ Alternative: lambda lifting
(reiner λ -Kalkül, keine zusätzlichen Datenstrukturen)

Lambda-Lifting (Realisierung)

- ▶ verwendet Kombinatoren (globale Funktionen)

$$I = \lambda x.x, S = \lambda xyz.xz(yz), K = \lambda xy.y$$

- ▶ und Transformationsregeln

$$\text{lift}(FA) = \text{lift}(F) \text{lift}(A), \text{lift}(\lambda x.B) = \text{lift}_x(B);$$

- ▶ Spezifikation: $\text{lift}_x(B)x \rightarrow_{\beta}^* B$

- ▶ Implementierung:

$$\text{falls } x \notin \text{FV}(B), \text{ dann } \text{lift}_x(B) = KB;$$

$$\text{sonst } \text{lift}_x(x) = I, \text{lift}_x(FA) = S \text{lift}_x(F) \text{lift}_x(A)$$

$$\text{Beispiel: } \text{lift}(\lambda x.\lambda y.yx) = \text{lift}_x(\text{lift}_y(yx)) = \text{lift}_x(SI(Kx)) = S(K(SI))(S(KK)I)$$

Motivation

- ▶ Lambda-Kalkül zur Modellierung von Abstraktion und Applikation, wesentliches Merkmal: benutzerdefinierte Funktionen mit gebundene Variablen.
- ▶ *Kombinatorische Logik* ist ein Berechnungsmodell mit einer kleinen, fixierte Menge von (globalen) Funktionen, diese heißen *Kombinatoren*.

Beispiele: $S = \lambda xyz.xz(yz)$, $K = \lambda xy.x$

Beispiele

- ▶ vordefinierte Kombinatoren:

$$I = \lambda x.x, K = \lambda xy.x, S = \lambda xyz.xz(yz)$$

Ü: Berechne Normalform von $SKKx$, von $SIIx$

- ▶ weitere, z. B.

$$B = \lambda xyz.x(yz), C = \lambda xyz.xzy, J = \lambda xyzw.xy(xwz)$$

Ü: simuliere B und C durch I und J

Systematische Übersetzung

Spezifikation:

- ▶ Eingabe: geschlossener Lambda-Ausdruck P
- ▶ Ausgabe: äquivalenter Kombinator-Ausdruck $[P]$
(Applikationen mit S, K, I ; sonst keine Variablen und Lambdas)

benutzt $[\lambda x.A] = \text{lift}_x(A)$ mit Spezifikation: $\text{lift}_x(A)x \rightarrow^* A$

- ▶ $\text{lift}_x(y) = \text{falls } x = y \text{ dann } I \text{ sonst } Ky$
- ▶ $\text{lift}_x(AB) = S \text{ lift}_x(A) \text{ lift}_x(B)$
- ▶ $\text{lift}_x(\lambda y.A) = \text{lift}_x(\text{lift}_y(A))$

Beispiele: $\lambda x.xx, \lambda xy.y, \lambda xy.yx$ — Vereinfachungen?

Kombinator-Basen

Def: Eine Menge M von Kombinatoren heißt *Basis*, falls es zu jedem Lambda-Ausdruck einen äquivalenten Ausdruck nur aus Applikationen und Kombinatoren aus M gibt.

Satz: $\{S, K, I\}$ ist Basis.

Satz: $\{S, K\}$ ist Basis. — Beweis? $I = \dots$

Satz: es gibt eine Basis mit nur einem Element. (Schwer.)

Literatur:

- ▶ Henk Barendregt: The Lambda Calculus, its Syntax and Semantics, 1984. <http://www.cs.ru.nl/~henk/>
- ▶ Raymond Smullyan: How To Mock a Mockingbird, 1985. <http://www.raymondsmullyan.com/>

Anwendungen

- ▶ Übersetzung von λ nach CL
entspricht Closure-Conversion und Lifting (beides,
gleichzeitig)
- ▶ CL: feste Menge (Basis) von Kombinatoren,
CC+L: Kombinatoren hängen vom Programmtext ab
- ▶ CL als Programmiersprache: <http://www.madore.org/~david/programs/unlambda/>

Bsp: Berechnung von Fibonacci-Zahlen in Unlambda:

```
``s``s``sii`ki `k.*``s``s`ks  
``s`k`s`ks``s``s`ks``s`k`s`kr``s`k`sikk  
`k``s`ksk
```

Motivation

- ▶ (klassische) reale CPU/Rechner hat nur *globalen* Speicher (Register, Hauptspeicher)
- ▶ Argumentübergabe (Hauptprogramm → Unterprogramm) muß diesen Speicher benutzen (Rückgabe brauchen wir nicht wegen CPS)
- ▶ Zugriff auf Register schneller als auf Hauptspeicher ⇒ bevorzugt Register benutzen.

Plan (I)

- ▶ Modell: Rechner mit beliebig vielen Registern (R_0, R_1, \dots)
- ▶ Befehle:
 - ▶ Literal laden (in Register)
 - ▶ Register laden (kopieren)
 - ▶ direkt springen (zu literaler Adresse)
 - ▶ indirekt springen (zu Adresse in Register)
- ▶ Unterprogramm-Argumente in Registern:
 - ▶ für Abstraktionen: (R_0, R_1, \dots, R_k)
(genau diese, genau dieser Reihe nach)
 - ▶ für primitive Operationen: beliebig
- ▶ Transformation: lokale Namen \rightarrow Registernamen

Plan (II)

- ▶ Modell: Rechner mit begrenzt vielen realen Registern, z. B. (R_0, \dots, R_7)
- ▶ falls diese nicht ausreichen: *register spilling*
virtuelle Register in Hauptspeicher abbilden
- ▶ Hauptspeicher (viel) langsamer als Register:
möglichst wenig HS-Operationen:
geeignete Auswahl der Spill-Register nötig

Registerbenutzung

Allgemeine Form der Programme:

```
(let* ((r1 (...))
      (r2 (...))
      (r3 (...)))
      ...
      (r4 ...))
```

für jeden Zeitpunkt ausrechnen: Menge der *freien* Register (= deren aktueller Wert nicht (mehr) benötigt wird)
nächstes Zuweisungsziel ist niedrigstes freies Register (andere Varianten sind denkbar)
vor jedem UP-Aufruf: *register shuffle* (damit die Argumente in R_0, \dots, R_k stehen)

Compiler-Übungen

(ist gleichzeitig Wiederholung Rekursion)

1. implementiere fehlende Codegenerierung/Runtime für

```
let { p = new 42
    ; f = \ x -> if (x == 0) then 1
                else (x * (get p) (x-1))
    ; foo = put p f
} in f 5
```

2. ergänze das Programm, so daß 5! ausgerechnet wird

```
let { f = label x (tuple x 5 1) }
in  if ( 0 == nth 1 f )
    then nth 2 f
    else jump ...
        (tuple ... ... ..)
```

Motivation

Speicher-Allokation durch Konstruktion von

- ▶ Zellen, Tupel, Closures

Modell: Speicherbelegung = gerichteter Graph

Knoten *lebendig*: von Register aus erreichbar.

sonst tot \Rightarrow automatisch freigeben

Gliederung:

- ▶ mark/sweep (pointer reversal, Schorr/Waite 1967)
- ▶ twospace (stop-and-copy, Cheney 1970)
- ▶ generational (JVM)

Mark/Sweep

Plan: wenn Speicher voll, dann:

- ▶ alle lebenden Zellen markieren
- ▶ alle nicht markierten Zellen in Freispeicherliste

Problem: zum Markieren muß man den Graphen durchqueren, man hat aber keinen Platz (z. B. Stack), um das zu organisieren.

Lösung:

H. Schorr, W. Waite: *An efficient machine-independent procedure for garbage collection in various list structures*, Communications of the ACM, 10(8):481-492, August 1967.
temporäre Änderungen im Graphen selbst (pointer reversal)

Pointer Reversal (Invariante)

ursprünglicher Graph G_0 , aktueller Graph G :

Knoten (cons) mit zwei Kindern (head, tail), markiert mit

- ▶ 0: noch nicht besucht
- ▶ 1: head wird besucht (head-Zeiger ist invertiert)
- ▶ 2: tail wird besucht (tail-Zeiger ist invertiert)
- ▶ 3: fertig

globale Variablen p (parent), c (current).

Invariante: man erhält G_0 aus G , wenn man

- ▶ head/tail-Zeiger aus 1/2-Zellen (nochmals) invertiert
- ▶ und Zeiger von p auf c hinzufügt.

Pointer Reversal (Ablauf)

- ▶ pre: $p = \text{null}$, $c = \text{root}$, $\forall z : \text{mark}(z) = 0$
- ▶ post: $\forall z : \text{mark}(z) = \text{if } (\text{root} \rightarrow^* z) \text{ then } 3 \text{ else } 0$

Schritt (neue Werte immer mit '): falls $\text{mark}(c) = \dots$

- ▶ 0: $c' = \text{head}(c)$; $\text{head}'(c) = p$; $\text{mark}'(c) = 1$; $p' = c$;
- ▶ 1,2,3: falls $\text{mark}(p) = \dots$
 - ▶ 1: $\text{head}'(p) = c$; $\text{tail}'(p) = \text{head}(p)$; $\text{mark}'(p) = 2$; $c' = \text{tail}(p)$; $p' = p$
 - ▶ 2: $\text{tail}'(p) = c$; $\text{mark}'(p) = 3$; $p' = \text{tail}(p)$; $c' = p$;

Knoten werden in Tiefensuch-Reihenfolge betreten.

Eigenschaften Mark/Sweep

- ▶ benötigt 2 Bit Markierung pro Zelle, aber keinen weiteren Zusatzspeicher
- ▶ Laufzeit für mark \sim | lebender Speicher |
- ▶ Laufzeit für sweep \sim | gesamter Speicher |
- ▶ Fragmentierung (Freispeicherliste springt)

Ablegen von Markierungs-Bits:

- ▶ in Zeigern/Zellen selbst
(Beispiel: Rechner mit Byte-Adressierung, aber Zellen immer auf Adressen $\equiv 0 \pmod{4}$: zwei LSB sind frei.)
- ▶ in separaten Bitmaps

Stop-and-copy (Plan)

Plan:

- ▶ zwei Speicherbereiche (Fromspace, Tospace)
- ▶ Allokation im Fromspace
- ▶ wenn Fromspace voll, kopiere lebende Zellen in Tospace und vertausche dann Fromspace \leftrightarrow Tospace

auch hier: Verwaltung ohne Zusatzspeicher (Stack)

C. J. Cheney: *A nonrecursive list compacting algorithm*,
Communications of the ACM, 13(11):677–678, 1970.

Stop-and-copy (Invariante)

fromspace, tospace : array [0 ... N] of cell

Variablen: $0 \leq \text{scan} \leq \text{free} \leq N$

einige Zellen im fromspace enthalten Weiterleitung (= Adresse im tospace)

Invarianten:

- ▶ $\text{scan} \leq \text{free}$
- ▶ Zellen aus tospace [0 ... scan-1] zeigen in tospace
- ▶ Zellen aus tospace [scan ... free-1] zeigen in fromspace
- ▶ wenn man in G (mit Wurzel tospace[0]) allen Weiterleitungen folgt, erhält man isomorphes Abbild von G_0 (mit Wurzel fromspace[0]).

Stop-and-copy (Ablauf)

- ▶ pre: $\text{tospace}[0] = \text{Wurzel}$, $\text{scan} = 0, \text{free} = 1$.
- ▶ post: $\text{scan} = \text{free}$

Schritt: while $\text{scan} < \text{free}$:

- ▶ für alle Zeiger p in $\text{tospace}[\text{scan}]$:
 - ▶ falls $\text{fromspace}[p]$ weitergeleitet auf q , ersetze p durch q .
 - ▶ falls keine Weiterleitung
 - ▶ kopiere $\text{fromspace}[p]$ nach $\text{tospace}[\text{free}]$,
 - ▶ Weiterleitung $\text{fromspace}[p]$ nach free eintragen,
 - ▶ ersetze p durch free , erhöhe free .
- ▶ erhöhe scan .

Besucht Knoten in Reihenfolge einer Breitensuche.

Stop-and-copy (Eigenschaften)

- ▶ benötigt „doppelten“ Speicherplatz
- ▶ Laufzeit \sim | lebender Speicher |
- ▶ kompaktierend
- ▶ Breitensuch-Reihenfolge zerstört Lokalität.

Breiten- und Tiefensuche

put (Wurzel(G));

while Speicher nicht leer:

$u \leftarrow$ get; wenn u nicht markiert:

 markiere u ;

 für alle v mit $u \rightarrow_G v$: put(v);

dabei ist Speicher (mit Operationen put/get):

- ▶ Stack (LIFO) (push/pop) \Rightarrow Tiefensuche,
- ▶ Queue (FIFO) (enqueue/dequeue) \Rightarrow Breitensuche.

woran erkennt man, daß eine Knotenreihenfolge eines gerichteten Graphen G bei einer Breiten/Tiefensuche entstanden sein könnte? (wenn man Reihenfolge der Nachfolger eines Knoten jeweils beliebig wählen kann)

Speicher mit Generationen

Beobachtung: es gibt

- ▶ (viele) Zellen, die sehr kurz leben
- ▶ Zellen, die sehr lange (ewig) leben

Plan:

- ▶ bei den kurzlebigen Zellen soll GC-Laufzeit \sim Leben (und nicht \sim Leben + Müll) sein
- ▶ die langlebigen Zellen möchte man nicht bei jeder GC besuchen/kopieren.

Lösung: benutze Generationen, bei GC in Generation k : betrachte alle Zellen in Generationen $> k$ als lebend.

Speicherverwaltung in JVM

Speicheraufteilung:

- ▶ Generation 0:
 - ▶ Eden, Survivor 1, Survivor 2
- ▶ Generation 1: Tenured

Ablauf

- ▶ minor collection (Eden voll):
kompaktierend: Eden + Survivor 1/2 → Survivor 2/1 ...
... falls dabei Überlauf → Tenured
- ▶ major collection (Tenured voll):
alles nach Survivor 1 (+ Tenured)

Speicherverwaltung in JVM (II)

- ▶ richtige Benutzung der Generationen:
 - ▶ bei minor collection (in Gen. 0) gelten Zellen in Tenured (Gen. 1) als lebend (und werden nicht besucht)
 - ▶ Spezialbehandlung für Zeiger von Gen. 1 nach Gen. 0 nötig (wie können die überhaupt entstehen?)

- ▶ **Literatur:**

<http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ws09/pps/folien/main/node78.html>

- ▶ **Aufgabe:**

<http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ws09/pps/folien/main/node79.html>

Methoden

- ▶ Inferenzsysteme
- ▶ Lambda-Kalkül
- ▶ (algebraischen Datentypen, Pattern Matching, Funktionen höherer Ordnung)
- ▶ Monaden

Semantik

- ▶ dynamische (Programmausführung)
 - ▶ Interpretation
 - ▶ funktional, • imperativ (Speicher)
 - ▶ Ablaufsteuerung (Continuations)
 - ▶ Transformation (Kompilation)
 - ▶ CPS transformation
 - ▶ closure passing, lifting, • Registerzuweisung
- ▶ statische: Typisierung (Programmanalyse)
 - ▶ monomorph/polymorph
 - ▶ deklariert/rekonstruiert

Monaden zur Programmstrukturierung

```
class Monad m where { return :: a -> m a ;  
    (>>=)    :: m a -> (a -> m b) -> m b }
```

Anwendungen:

- ▶ semantische Bereiche f. Interpreter,
- ▶ Parser,
- ▶ Unifikation

Testfragen (für jede Monad-Instanz):

- ▶ Typ (z. B. Action)
- ▶ anwendungsspezifische Elemente (z. B. new, put)
- ▶ Implementierung der Schnittstelle (return, bind)

Prüfungsvorbereitung

Beispielklausur <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ws11/cb/klausur/>

- ▶ was ist eine Umgebung (Env), welche Operationen gehören dazu?
- ▶ was ist eine Speicher (Store), welche Operationen gehören dazu?
- ▶ Gemeinsamkeiten/Unterschiede zw. Env und Store?
- ▶ Für $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$: zeichne den Syntaxbaum, bestimme die Menge der freien und die Menge der gebundenen Variablen. Markiere im Syntaxbaum alle Redexe. Gib die Menge der direkten Nachfolger an (einen Beta-Schritt ausführen).
- ▶ Definiere Beta-Reduktion und Alpha-Konversion im Lambda-Kalkül. Wozu wird Alpha-Konversion benötigt? (Dafür Beispiel angeben.)
- ▶ Wie kann man Records (Paare) durch Funktionen simulieren? (Definiere Lambda-Ausdrücke für `pair`, `first`, `second`)