

# Compilerbau Vorlesung WS 2008–11,13,15,17,19,SS 22

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

8. Juli 2022

– Typeset by FoilTeX –

## Einleitung

### Beispiel: C-Compiler

```
• int gcd (int x, int y) {  
    while (y>0) { int z = x%y; x = y; y = z;  
    return x; }
```

• gcc -S -O2 gcd.c erzeugt gcd.s:

```
.L3:    movl    %edx, %r8d ; cld ; idivl  %r8d  
        movl    %r8d, %eax ; testl  %edx, %edx  
        jg     .L3
```

Ü: was bedeutet `cld`, warum ist es notwendig?

Ü: welche Variable ist in welchem Register?

– Typeset by FoilTeX –

1

• identischer (!) Assembler-Code für

```
int gcd_func (int x, int y) {  
    return y > 0 ? gcd_func (y, x % y) : x;  
}
```

• vollständige Quelltexte:

<https://gitlab.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cb-ws19/blob/master/gcd.c>

• Bsp Java-Kompilation: <https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/safe-speed/>

– Typeset by FoilTeX –

2

## Sprachverarbeitung

• mit Compiler:

– Quellprogramm → Compiler → Zielprogramm  
– Eingaben → Zielprogramm → Ausgaben

• mit Interpreter:

– Quellprogramm, Eingaben → Interpreter → Ausgaben

• Mischform:

– Quellprogramm → Compiler → Zwischenprogramm  
– Zwischenprogramm, Eingaben → virtuelle Maschine →  
Ausgaben

Gemeinsamkeit: syntaxgesteuerte Semantik (Ausführung  
bzw. Übersetzung)

– Typeset by FoilTeX –

3

## Inhalt der Vorlesung

Konzepte von Programmiersprachen

- Semantik von einfachen (arithmetischen) Ausdrücken
- lokale Namen, • Unterprogramme (Lambda-Kalkül)
- Zustandsänderungen (imperative Prog.)
- Continuations zur Ablaufsteuerung

realisieren durch

- Interpretation, • Kompilation

Hilfsmittel:

- Theorie: Inferenzsysteme (f. Auswertung, Typisierung)
- Praxis: Haskell, Monaden (f. Auswertung, Parser)

– Typeset by FoilTeX –

4

## Literatur

- Franklyn Turbak, David Gifford, Mark Sheldon: *Design Concepts in Programming Languages*, MIT Press, 2008.  
<http://cs.wellesley.edu/~fturbak/>
- Guy Steele, Gerald Sussman: *Lambda: The Ultimate Imperative*, MIT AI Lab Memo AIM-353, 1976 (the original 'lambda papers',  
<https://web.archive.org/web/20030603185429/http://library.readscheme.org/page1.html>)
- Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi and Jeffrey D. Ullman: *Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd edition)* Addison-Wesley, 2007, <http://dragonbook.stanford.edu/>
- J. Waldmann: *Das M-Wort in der Compilerbauvorlesung*, Workshop der GI-Fachgruppe Prog. Spr. und Rechnerkonzepte, 2013 <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/13/fg214/>

– Typeset by FoilTeX –

5

## Anwendungen von Techniken des Compilerbaus

- Implementierung höherer Programmiersprachen
- architekturspezifische Optimierungen (Parallelisierung, Speicherhierarchien)
- Entwurf neuer Architekturen (RISC, spezielle Hardware)
- Programm-Übersetzungen (Binär-Übersetzer, Hardwaresynthese, Datenbankanfragesprachen)
- Software-Werkzeuge (z.B. Refaktorisierer)
- domainspezifische Sprachen

– Typeset by FoilTeX –

6

## Organisation der Vorlesung

- pro Woche eine Vorlesung, eine Übung.
- in Vorlesung, Übung und Hausaufgaben:
  - Theorie,
  - Praxis: Quelltexte (weiter-)schreiben (erst Interpreter, dann Compiler)
- Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten von Übungsaufgaben
- Prüfung: Klausur (120 min, keine Hilfsmittel)

– Typeset by FoilTeX –

7

## Beispiel: Interpreter f. arith. Ausdrücke

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp | Times Exp Exp
         deriving ( Show )

ex1 :: Exp
ex1 =
  Times ( Plus ( Const 1 ) ( Const 2 ) ) ( Const 3 )

value :: Exp -> Integer
value x = case x of
  Const i -> i
  Plus x y -> value x + value y
  Times x y -> value x * value y
```

das ist syntax-gesteuerte Semantik:

Wert des Terms wird aus Werten der Teilterme kombiniert

## Beispiel: lokale Variablen und Umgebungen

```
data Exp = ... | Let String Exp Exp | Ref String
ex2 :: Exp
ex2 = Let "x" ( Const 3 )
      ( Times ( Ref "x" ) ( Ref "x" ) )
type Env = ( String -> Integer )
extend n w e = \ m -> if m == n then w else e m
value :: Env -> Exp -> Integer
value env x = case x of
  Ref n -> env n
  Let n x b -> value (extend n (value env x) env) b
  Const i -> i
  Plus x y -> value env x + value env y
  Times x y -> value env x * value env y
test2 = value ( \ _ -> 42 ) ex2
```

## Übung (Haskell)

### • Wiederholung Haskell

- Interpreter/Compiler: ghci <http://haskell.org/>
- Funktionsaufruf nicht  $f(a, b, c+d)$ , sondern  $f a b (c+d)$
- Konstruktor beginnt mit Großbuchstabe und ist auch eine Funktion

### • Wiederholung funktionale

Programmierung/Entwurfsmuster

- rekursiver algebraischer Datentyp (ein Typ, mehrere Konstruktoren)  
(OO: Kompositum, ein Interface, mehrere Klassen)

- rekursive Funktion

### • Wiederholung Pattern Matching:

- beginnt mit `case ... of`, dann Zweige
- jeder Zweig besteht aus Muster und Folge-Ausdruck
- falls das Muster paßt, werden die Mustervariablen gebunden und der Folge-Ausdruck ausgewertet

## Übung (Interpreter)

### • Benutzung:

- Beispiel für die Verdeckung von Namen bei geschachtelten Let
- Beispiel dafür, daß der definierte Name während seiner Definition nicht sichtbar ist

### • Erweiterung:

Verzweigungen mit C-ähnlicher Semantik:

Bedingung ist arithmetischer Ausdruck, verwende 0 als Falsch und alles andere als Wahr.

```
data Exp = ...
         | If Exp Exp Exp
```

- Quelltext-Archiv: siehe <https://gitlab.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cb-ws19>

# Inferenz-Systeme

## Motivation

- inferieren = ableiten
- Inferenzsystem  $I$ , Objekt  $O$ ,  
Eigenschaft  $I \vdash O$  (in  $I$  gibt es eine Ableitung für  $O$ )
- damit ist  $I$  eine *Spezifikation* einer Menge von Objekten
- man ignoriert die *Implementierung* (= das Finden von Ableitungen)
- Anwendungen im Compilerbau:  
Auswertung von Programmen, Typisierung von Programmen

## Definition

ein *Inferenz-System*  $I$  besteht aus

- Regeln (besteht aus Prämissen, Konklusion)

$$\text{Schreibweise } \frac{P_1, \dots, P_n}{K}$$

- Axiomen (= Regeln ohne Prämissen)

eine *Ableitung* für  $F$  bzgl.  $I$  ist ein Baum:

- jeder Knoten ist mit einer Formel beschriftet
- jeder Knoten (mit Vorgängern) entspricht Regel von  $I$
- Wurzel (Ziel) ist mit  $F$  beschriftet

Def:  $I \vdash F : \iff \exists I\text{-Ableitungsbaum mit Wurzel } F.$

## Regel-Schemata

- um unendliche Menge zu beschreiben, benötigt man unendliche Regelmengen
- diese möchte man endlich notieren
- ein *Regel-Schema* beschreibt eine (mglw. unendliche) Menge von Regeln, Bsp:  $\frac{(x, y)}{(x - y, y)}$
- Schema wird *instantiert* durch Belegung der Schema-Variablen  
Bsp: Belegung  $x \mapsto 13, y \mapsto 5$   
ergibt Regel  $\frac{(13, 5)}{(8, 5)}$

## Inferenz-Systeme (Beispiel 1)

- Grundbereich = Zahlenpaare  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- Axiom:

$$\overline{(13, 5)}$$

- Regel-Schemata:

$$\frac{(x, y)}{(x - y, y)}, \quad \frac{(x, y)}{(x, y - x)}$$

kann man  $(1, 1)$  ableiten?  $(-1, 5)$ ?  $(2, 4)$ ?

## Das Ableiten als Hüll-Operation

- für Inferenzsystem  $I$  über Bereich  $O$  und Menge  $M \subseteq O$  definiere  
 $M^+ := \{K \mid \frac{P_1, \dots, P_n}{K} \in I, P_1 \in M, \dots, P_n \in M\}.$
- Übung: beschreibe  $\emptyset^+.$
- Satz:  $\{F \mid I \vdash F\}$  ist die bzgl.  $\subseteq$  kleinste Menge  $M$  mit  $M^+ \subseteq M$   
Bemerkung: „die kleinste“: Existenz? Eindeutigkeit?
- Satz:  $\{F \mid I \vdash F\} = \bigcup_{i \geq 0} M_i$  mit  $M_0 = \emptyset, \forall i : M_{i+1} = M_i^+$

## Aussagenlogische Resolution

Formel  $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee D)$  in konjunktiver Normalform dargestellt als  $\{\{A, \neg B, \neg C\}, \{C, D\}\}$

(Formel = Menge von Klauseln, Klausel = Menge von Literalen, Literal = Variable oder negierte Variable)

folgendes Inferenzsystem heißt *Resolution*:

- Axiome: Klauselmengen einer Formel,
- Regel:  
– Prämissen: Klauseln  $K_1, K_2$  mit  $v \in K_1, \neg v \in K_2$   
– Konklusion:  $(K_1 \setminus \{v\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg v\})$

Eigenschaft (Korrektheit): wenn  $\frac{K_1, K_2}{K}$ , dann  $K_1 \wedge K_2 \rightarrow K.$

## Resolution (Vollständigkeit)

die Formel (Klauselmengen) ist nicht erfüllbar  $\iff$  die leere Klausel ist durch Resolution ableitbar.

Bsp:  $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$

Beweispläne:

- $\Rightarrow$ : Gegeben ist die nicht erfüllbare Formel. Gesucht ist eine Ableitung für die leere Klausel. Methode: Induktion nach Anzahl der in der Formel vorkommenden Variablen.
- $\Leftarrow$ : Gegeben ist die Ableitung der leeren Klausel. Zu zeigen ist die Nichterfüllbarkeit der Formel. Methode: Induktion nach Höhe des Ableitungsbaumes.

## Die Abtrennungsregel (modus ponens)

... ist das Regelschema  $\frac{P \rightarrow Q, P}{Q}$ ,

Der *Hilbert-Kalkül* für die Aussagenlogik ist das Inferenz-System mit modus ponens und Axiom-Schemata wie z. B.

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

(es gibt verschiedene Varianten des Kalküls) — Man zeigt:

- Korrektheit: jede ableitbare Aussage ist allgemeingültig
- Vollständigkeit: jede allgemeine Aussage ist ableitbar

## Inferenz von Werten

- Grundbereich: Aussagen der Form  $\text{wert}(p, z)$  mit  $p \in \text{Exp}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$

```
data Exp = Const Integer
        | Plus Exp Exp
        | Times Exp Exp
```

- Axiome:  $\text{wert}(\text{Const } z, z)$

- Regeln:

$$\frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Plus } X Y, a + b)}, \frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Times } X Y, a \cdot b)}, \dots$$

## Umgebungen (Spezifikation)

- Grundbereich: Aussagen der Form  $\text{wert}(E, p, z)$

(in Umgebung  $E$  hat Programm  $p$  den Wert  $z$ )

Umgebungen konstruiert aus  $\emptyset$  und  $E[v := b]$

- Regeln für Operatoren  $\frac{\text{wert}(E, X, a), \text{wert}(E, Y, b)}{\text{wert}(E, \text{Plus } X Y, a + b)}, \dots$

- Regeln für Umgebungen

$$\frac{}{\text{wert}(E[v := b], v, b)}, \frac{\text{wert}(E, v', b')}{\text{wert}(E[v := b], v', b')} \text{ für } v \neq v'$$

- Regeln für Bindung:  $\frac{\text{wert}(E, X, b), \text{wert}(E[v := b], Y, c)}{\text{wert}(E, \text{let } v = X \text{ in } Y, c)}$

## Umgebungen (Implementierung)

Umgebung ist (partielle) Funktion von Name nach Wert

Realisierungen: `type Env = String -> Integer`

Operationen:

- `empty :: Env` leere Umgebung
- `lookup :: Env -> String -> Integer`  
Notation:  $e(x)$
- `extend :: String -> Integer -> Env -> Env`  
Notation:  $e[v := z]$

Beispiel

```
lookup (extend "y" 4 (extend "x" 3 empty)) "x"
entspricht ( $\emptyset[x := 3][y := 4]$ )x
```

## Semantische Bereiche

bisher: Wert eines Ausdrucks ist Zahl.

jetzt erweitern (Motivation: if-then-else mit richtigem Typ):

```
data Val = ValInt Int
        | ValBool Bool
```

Dann brauchen wir auch

- `data Val = ... | ValErr String`
- vernünftige Notation (Kombinatoren) zur Einsparung von Fallunterscheidungen bei Verkettung von Rechnungen

```
with_int :: Val -> (Int -> Val) -> Val
```

## Continuations

Programmablauf-Abstraktion durch Continuations:

Definition:

```
with_int :: Val -> (Int -> Val) -> Val
with_int v k = case v of
  ValInt i -> k i
  _ -> ValErr "expected ValInt"
```

Benutzung:

```
value env x = case x of
  Plus l r ->
    with_int (value env l) $ \ i ->
      with_int (value env r) $ \ j ->
        ValInt (i + j)
```

## Aufgaben

- Bool:
  - Boolesche Konstanten.
  - relationale Operatoren (`==`, `<`, o.ä.),
  - Inferenz-Regel(n) für Auswertung des `If`
  - Implementierung der Auswertung von `if/then/else` mit `with_bool`,
- Refaktorisierung
  - neue Hilfsfunktionen zur kürzeren Notation der Auswertung von `Plus`, `Times`,
  - evtl. relationale Operatoren

## Unterprogramme

### Beispiele

- in verschiedenen Prog.-Sprachen gibt es verschiedene Formen von Unterprogrammen:
  - Prozedur, sog. Funktion, Methode, Operator, Delegate, anonymes Unterprogramm
- allgemeinstes Modell:
  - Kalkül der anonymen Funktionen (Lambda-Kalkül),

## Interpreter mit Funktionen

- abstrakte Syntax:

```
data Exp = ...
  | Abs { par :: Name , body :: Exp }
  | App { fun :: Exp , arg :: Exp }
```

- konkrete Syntax:

```
let { f = \ x -> x * x } in f (f 3)
```

- konkrete Syntax (Alternative):

```
let { f x = x * x } in f (f 3)
```

## Semantik (mit Funktionen)

- erweitere den Bereich der Werte:

```
data Val = ... | ValFun ( Val -> Val )
```

- erweitere Interpreter:

```
value :: Env -> Exp -> Val
value env x = case x of
  ... | Abs n b -> _ | App f a -> _
```

- mit Hilfsfunktion `with_fun :: Val -> ...`

- Testfall (in konkreter Syntax)

```
let { x = 4 } in let { f = \ y -> x * y }
  in let { x = 5 } in f x
```

## Let und Lambda

- `let { x = A } in Q`

kann übersetzt werden in

```
(\ x -> Q) A
```

- `let { x = a , y = b } in Q`

wird übersetzt in ...

- beachte: das ist nicht das `let` aus Haskell

## Mehrstellige Funktionen

... simulieren durch einstellige:

- mehrstellige Abstraktion:

```
\ x y z -> B := \ x -> (\ y -> (\ z -> B ))
```

- mehrstellige Applikation:

```
f P Q R := ((f P) Q) R
```

(die Applikation ist links-assoziativ)

- der Typ einer mehrstelligen Funktion:

```
T1 -> T2 -> T3 -> T4 :=
  T1 -> (T2 -> (T3 -> T4))
```

(der Typ-Pfeil ist rechts-assoziativ)

## Semantik mit Closures

- bisher: `ValFun` ist Funktion als Datum der Gastsprache

```
value env x = case x of ...
  Abs n b -> ValFun $ \ v ->
    value (extend n v env) b
  App f a ->
    with_fun ( value env f ) $ \ g ->
      with_val ( value env a ) $ \ v -> g v
```

- alternativ: Closure: enthält Umgebung `env` und Code `b`

```
value env x = case x of ...
  Abs n b -> ValClos env n b
  App f a -> ...
```

## Closures (Spezifikation)

- Closure konstruieren (Axiom-Schema):

$$\overline{\text{wert}(E, \lambda n. b, \text{Clos}(E, n, b))}$$

- Closure benutzen (Regel-Schema, 3 Prämissen)

$$\frac{\text{wert}(E_1, f, \text{Clos}(E_2, n, b)), \text{wert}(E_1, a, w), \text{wert}(E_2[n := w], b, r)}{\text{wert}(E_1, f a, r)}$$

- Ü: Inferenz-Baum für Auswertung des vorigen Testfalls (geschachtelte `Let`) zeichnen

- ... oder Interpreter so erweitern, daß dieser Baum ausgegeben wird

## Rekursion?

- Das geht nicht, und soll auch nicht gehen:

```
let { x = 1 + x } in x
```

- aber das hätten wir doch gern:

```
let { f = \ x -> if x > 0
  then x * f (x - 1) else 1
  } in f 5
```

(nächste Woche)

- aber auch mit nicht rekursiven Funktionen kann man interessante Programme schreiben:

## Testfall (2)

```
let { t f x = f (f x) }
in let { s x = x + 1 }
    in t t t t s 0
```

- auf dem Papier den Wert bestimmen
- mit selbstgebautem Interpreter ausrechnen
- mit Haskell ausrechnen
- in JS (node) ausrechnen

## Übungen

1. Schreiben und benutzen Sie die Hilfsfunktion `with_val`, die im Skript an einigen Stellen schon benutzt wurde.

Realisieren Sie damit die strikte Semantik für Let-Bindung und Funktions-Anwendung.

2. alternative Implementierung von Umgebungen

- **bisher** `type Env = String -> Val`
- **jetzt** `type Env = Data.Map.Map String Val`

3. alternative Implementierung von Namen

der Vergleich von Strings (als Schlüssel im Suchbaum) ist teuer. Ist für diesen Interpreter zeitkritisch!

- **statt** `data Name = Name T.Text` **besser**

```
data Name =
  Name { hash :: Int, form :: T.Text }
  deriving (Eq, Ord)
```

- mit **smart constructor** `name :: String -> Name` dann `Times (Ref (name "x")) (Const 3)`
- und `instance IsString Name where ...` dann (wie früher!) `Times (Ref "x") (Const 3)`
- für später: der Compiler benutzt `Name` und `Env` nur zur Übersetzungszeit!  
Zur Laufzeit ist Umgebung ein Vektor von Vektoren (siehe VL PPS: Frames, statische Kette), die Längen und alle Indizes sind statisch bekannt.
- recherchieren und beschreiben Sie *FastString* in GHC (z.B. <https://gitlab.haskell.org/ghc/ghc/> -/

issues/20091, *interned strings (symbols)* in Ruby (oder ähnlich).

4. eingebaute primitive Rekursion (Induktion über Peano-Zahlen):

implementieren Sie die Funktion

```
fold :: r -> (r -> r) -> N -> r
```

Testfall: `fold 1 (\x -> 2*x) 5 == 32`

durch `data Exp = .. | Fold ..` und neuen Zweig in `value`

Wie kann man damit die Fakultät implementieren?

5. entwerfen und realisieren Sie einen entsprechenden Operator zur Simulation von `while` (unbeschränkte Rekursion).

# Lambda-Kalkül (Wdhlg.)

## Motivation

1. Modellierung von Funktionen:

- intensional: Fkt. ist Berechnungsvorschrift, Programm
- (extensional: Fkt. ist Menge v. geordneten Paaren)

2. Notation mit gebundenen (lokalen) Variablen, wie in

- Analysis:  $\int x^2 dx, \sum_{k=0}^n k^2$
- Logik:  $\forall x \in A : \forall y \in B : P(x, y)$
- Programmierung:  

```
static int foo (int x) { ... }
```

# Der Lambda-Kalkül

- ist der Kalkül für Funktionen mit benannten Variablen
- Alonzo Church, 1936 ... Henk Barendregt, 1984 ...
- die wesentliche Operation ist das Anwenden einer Funktion:

$$(\lambda x.B)A \rightarrow_{\beta} B[x := A]$$

Beispiel:  $(\lambda x.x * x)(3 + 2) \rightarrow_{\beta} (3 + 2) * (3 + 2)$

- Im reinen Lambda-Kalkül gibt es *nur* Funktionen (keine Zahlen, Wahrheitswerte usw.)

## Lambda-Terme

- Menge  $\Lambda$  der Lambda-Terme (mit Variablen aus einer Menge  $V$ ):
  - (Variable) wenn  $x \in V, A \in \Lambda$
  - (Applikation) wenn  $F \in \Lambda, A \in \Lambda$ , dann  $(FA) \in \Lambda$
  - (Abstraktion) wenn  $x \in V, B \in \Lambda$ , dann  $(\lambda x.B) \in \Lambda$
 Beispiele:  $x, (\lambda x.x), ((xz)(yz)), (\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))))$
- verkürzte Notation (Klammern weglassen)
  - $(\dots((FA_1)A_2)\dots A_n) \sim FA_1A_2\dots A_n$
  - $\lambda x_1.(\lambda x_2.\dots(\lambda x_n.B)\dots) \sim \lambda x_1x_2\dots x_n.B$
 mit diesen Abkürzungen simuliert  $(\lambda x_1\dots x_n.B)A_1\dots A_n$  eine mehrstellige Funktion und -Anwendung

## Eigenschaften der Reduktion

- $\rightarrow_{\beta}$  auf  $\Lambda$  ist nicht terminierend (es gibt Terme mit unendlichen Ableitungen)  
 $W = \lambda x.xx, \Omega = WW.$
- es gibt Terme mit Normalform und unendlichen Ableitungen,  $KI\Omega$  mit  $K = \lambda xy.x, I = \lambda x.x$
- $\rightarrow_{\beta}$  auf  $\Lambda$  ist konfluent  
 $\forall A, B, C \in \Lambda : A \rightarrow_{\beta}^* B \wedge A \rightarrow_{\beta}^* C \Rightarrow \exists D \in \Lambda : B \rightarrow_{\beta}^* D \wedge C \rightarrow_{\beta}^* D$
- Folgerung: jeder Term hat höchstens eine Normalform

## Beziehung zur Semantik des Interpreters

- die Relation  $\rightarrow_{\beta}$  ist eine *small-step-Semantik*  
 wert( $E, X, v$ ) ist *big-step-Semantik* für Interpreter
- Diese „passen zusammen.“ — Formal (Ansatz):  
 $\forall X, Y \in \text{Exp}(\text{Abs}, \text{App}, ??) : X \rightarrow_{\beta}^* Y \iff \text{wert}(\emptyset, X, Y)$
- ist falsch (sinnfrei): Typen von  $Y$  passen nicht! Besser:  
 $\forall X \in \text{Exp}(\text{Abs}, \text{App}, ??\text{ConstBool}), B \in \{\text{False}, \text{True}\} :$   
 $X \rightarrow_{\beta}^* \text{ConstBool } B \iff \text{wert}(\emptyset, X, \text{ValBool } B)$
- gilt nur für bestimmte Reduktionsstrategie (nicht für  $\rightarrow_{\beta}^*$ )
- ist für induktiven Beweis nicht geeignet (nicht alle  $X$  sind geschlossen, nicht alle  $E$  sind  $\emptyset$ )

## Daten als Funktionen

- Simulation von Daten (Tupel) durch Funktionen (Lambda-Ausdrücke):
  - Konstruktor:  $\langle D_1, \dots, D_k \rangle := \lambda s.sD_1\dots D_k$
  - Selektoren:  $s_i^k := \lambda t.t(\lambda d_1\dots d_k.d_i)$
 es gilt  $s_i^k \langle D_1, \dots, D_k \rangle \rightarrow_{\beta}^* D_i$   
 Ü: überprüfen für  $k = 2$
- Anwendungen:
  - Modellierung von Listen, Zahlen
  - Auflösung simultaner Rekursion

## Lambda-Kalkül als universelles Modell

- Wahrheitswerte:  
 $\text{True} := \lambda xy.x, \text{False} := \lambda xy.y$
- Verzweigung:  $\text{if } b \text{ then } x \text{ else } y := bxy$
- natürliche Zahlen als iterierte Paare (Ansatz)  
 $(0) := \langle \text{True}, \lambda x.x \rangle; (n+1) := \langle \text{False}, n \rangle$
- $s_2^2$  ist partielle Vorgänger-Funktion:  $s_2^2(n+1) = n$
- Verzweigung:  $\text{if } a = 0 \text{ then } x \text{ else } y := s_1^2axy$
- Ü: nachrechnen. Ü: das geht sogar mit  $(0) = \lambda x.x$
- Rekursion?

## Fixpunkt-Kombinatoren (Motivation)

- Beispiel: die Fakultät  
 $f = \lambda x \rightarrow \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x*f(x-1)$   
 erhalten wir als Fixpunkt einer Fkt. 2. Ordnung  
 $g = \lambda h x \rightarrow \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x * h(x-1)$   
 $f = \text{fix } g \quad \text{-- d.h., } f = g f$
- Ü:  $g(\lambda z.z)7, \text{Ü: } \text{fix } g 7$
- Implementierung von  $\text{fix}$  mit Rekursion:  
 $\text{fix } g = g (\text{fix } g)$
- es geht aber auch *ohne Rekursion*. Ansatz:  $\text{fix} = AA$ , dann  $\text{fix } g = AAg = g(AAg) = g(\text{fix } g)$   
 eine Lösung ist  $A = \lambda xy\dots$

## Fixpunkt-Kombinatoren (Implementierung)

- Definition (der *Fixpunkt-Kombinator* von Turing)  
 $\Theta = (\lambda xy.(y(xxy)))(\lambda xy.(y(xxy)))$
- Satz:  $\Theta f \rightarrow_{\beta}^* f(\Theta f)$ , d. h.  $\Theta f$  ist Fixpunkt von  $f$
- Folgerung: im Lambda-Kalkül kann man simulieren:
  - Daten: Zahlen, Tupel von Zahlen
  - Programmablaufsteuerung durch:
    - \* Nacheinander, „ausführung“:  
Verkettung von Funktionen
    - \* Verzweigung,
    - \* Wiederholung: durch Rekursion (mit Fixpunktkomb.)

## Lambda-Berechenbarkeit

Satz: (Church, Turing)

Menge der Turing-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Wörter auf Band)

Alan Turing: On Computable Numbers, with an Application to the  
Entscheidungsproblem, Proc. LMS, 2 (1937) 42 (1) 230–265  
<https://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230>

= Menge der Lambda-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Lambda-Ausdrücke)

Alonzo Church: A Note on the Entscheidungsproblem, J. Symbolic  
Logic 1 (1936) 1, 40–41

= Menge der while-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Registerinhalte)

## Kodierung von Zahlen nach Church

- $c : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda : n \mapsto \lambda fx.f^n(x)$   
mit  $f^0(x) := x, f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$
- in Haskell: `c n f x = iterate f x !! n`
- Decodierung: `d e = e (\x -> x+1) 0`
- Nachfolger:  $s(c_n) = c_{n+1}$  für  $s = \lambda nfx.f(nfx)$   
1. auf Papier beweisen, 2. mit leancheck prüfen  
benutze `check $ \ (Natural x) -> ...`
- Addition: `plus c_a c_b = c_{a+b}` für `plus = \abfx.af(bfx)`
- implementiere die Multiplikation, beweise, prüfe
- Potenz: `pow c_a c_b = c_{a^b}` für `pow = \ab.ba`

## Übung Lambda-Kalkül (I)

- die Fakultät (z.B. von 7) ...
  - in Haskell (ohne Rekursion, aber mit `Data.Function.fix`)
  - in unserem Interpreter (ohne Rekursion, mit Turing-Fixpunktkombinator  $\Theta$ )
  - in Javascript (ohne Rekursion, mit  $\Theta$ )
- Kodierung von Wahrheitswerten und Zahlen (nach Church)
  - implementiere Test auf 0: `iszero c_n = if n = 0 then True else False`
  - implementiere Addition, Multiplikation, Fakultät ohne `If, Eq, Const, Plus, Times`

– für nützliche Ausgaben: das Resultat nach `ValInt` dekodieren (dabei muß `Plus` und `Const` benutzt werden)

## Übung Lambda-Kalkül (II)

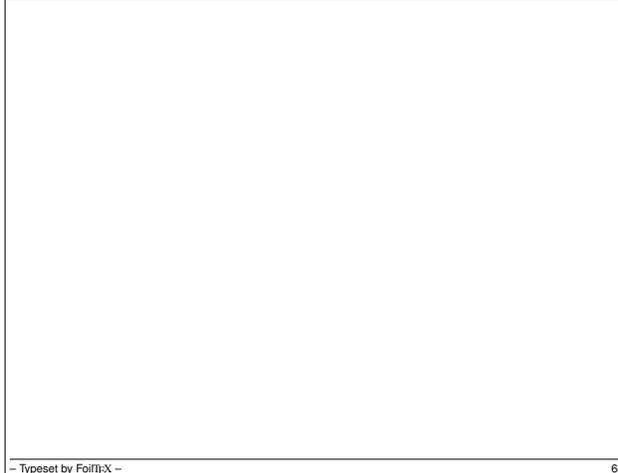
folgende Aufgaben aus H. Barendregt: *Lambda Calculus*

- (Abschn. 6.1.5) gesucht wird  $F$  mit  $Fxy = FyxF$ .  
Musterlösung: es gilt  $F = \lambda xy.FyxF = (\lambda fxy.fyxf)F$ ,  
also  $F = \Theta(\lambda fxy.fyxf)$
- (Aufg. 6.8.2) Konstruiere  $K^\infty \in \Lambda^0$  (ohne freie Variablen) mit  $K^\infty x = K^\infty$  (hier und in im folgenden hat = die Bedeutung  $(\rightarrow_{\beta} \cup \rightarrow_{\beta}^*)$ )
- Konstruiere  $A \in \Lambda^0$  mit  $Ax = xA$
- beweise den Doppelfixpunktsatz (Kap. 6.5)  
 $\forall F, G : \exists A, B : A = FAB \wedge B = GAB$

- (Aufg. 6.8.17, B. Friedman) Konstruiere Null, Nulltest, partielle Vorgängerfunktion für Zahlensystem mit Nachfolgerfunktion  $s = \lambda x.\langle x \rangle$  (das 1-Tupel)
- (Aufg. 6.8.14, J. W. Klop)

$$X = \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.$$
$$r(\text{this is a fixedpoint combinator})$$
$$Y = X^{27} = \underbrace{X \dots X}_{27}$$

Zeige, daß  $Y$  ein Fixpunktkombinator ist.



## Fixpunkte

### Motivation

Das ging bisher gar nicht:

```
let { f = \ x -> if x > 0
      then x * f (x - 1) else 1
    } in f 5
```

Lösung 1: benutze Fixpunktkombinator

```
let { Theta = ... } in
let { f = Theta ( \ g -> \ x -> if x > 0
                  then x * g (x - 1) else 1 )
    } in f 5
```

Lösung 2 (später): realisiere Fixpunktberechnung im Interpreter (neuer AST-Knotentyp)

## Existenz von Fixpunkten

Fixpunkt von  $f :: C \rightarrow C$  ist  $x :: C$  mit  $fx = x$ .

Existenz? Eindeutigkeit? Konstruktion?

Satz: Wenn  $C$  pointed CPO und  $f$  stetig, dann besitzt  $f$  genau einen kleinsten Fixpunkt.

- CPO = complete partial order = vollständige Halbordnung
- complete = jede monotone Folge besitzt Supremum (= kleinste obere Schranke)
- pointed:  $C$  hat kleinstes Element  $\perp$

## Beispiele f. Halbordnungen, CPOs

Halbordnung? pointed? complete?

- $\leq$  auf  $\mathbb{N}$
- $\leq$  auf  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- $\leq$  auf  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$
- $\leq$  auf  $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1\}$
- Teilbarkeit auf  $\mathbb{N}$
- Präfix-Relation auf  $\Sigma^*$
- $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \mid (x_1 \leq x_2) \vee (y_1 \leq y_2)\}$  auf  $\mathbb{R}^2$
- $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \mid (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)\}$  auf  $\mathbb{R}^2$
- Relation  $\subseteq$  auf  $\{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$
- identische Relation  $\text{id}_M$  auf einer beliebigen Menge  $M$
- $\{(\perp, x) \mid x \in M_\perp\} \cup \text{id}_M$  auf  $M_\perp := \{\perp\} \cup M$

## Stetige Funktionen

$f$  ist stetig :=

- $f$  ist monoton:  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- und für monotone Folgen  $[x_0, x_1, \dots]$  gilt:  
 $f(\sup[x_0, x_1, \dots]) = \sup[f(x_0), f(x_1), \dots]$

Beispiele: in  $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \leq)$

- $x \mapsto 42$  ist stetig
- $x \mapsto \text{if } x < +\infty \text{ then } x + 1 \text{ else } +\infty$
- $x \mapsto \text{if } x < +\infty \text{ then } 42 \text{ else } +\infty$

Satz: Wenn  $C$  pointed CPO und  $f : C \rightarrow C$  stetig, dann besitzt  $f$  genau einen kleinsten Fixpunkt ... und dieser ist  $\sup[\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots]$

## Funktionen als CPO

- Menge der partiellen Funktionen von  $B$  nach  $B$ :

$$C = (B \leftrightarrow B)$$

- partielle Funktion  $f : B \leftrightarrow B$   
entspricht totaler Funktion  $f : B \rightarrow B_\perp$
- $C$  geordnet durch  $f \leq g \iff \forall x \in B : f(x) \leq g(x)$ ,  
wobei  $\leq$  die vorhin definierte CPO auf  $B_\perp$
- $f \leq g$  bedeutet:  $g$  ist Verfeinerung von  $f$
- Das Bottom-Element von  $C$  ist die überall undefinierte Funktion. (diese heißt auch  $\perp$ )

## Funktionen als CPO, Beispiel

- der Operator  $F =$

```
\ g -> ( \ x -> if (x==0) then 0
              else 2 + g (x - 1) )
```

ist stetig auf  $(\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N})$  (Beispiele nachrechnen!)

- Iterative Berechnung des Fixpunktes:

$$\perp = \emptyset \quad \text{überall undefiniert}$$

$$F\perp = \{(0, 0)\}$$

$$F(F\perp) = \{(0, 0), (1, 2)\}$$

$$F^3\perp = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$$

- $\sup[\dots, F^k\perp, \dots] = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\}$

## Welche Funktionale sind stetig?

- die Erfahrung (der Programmierung mit rekursiven Funktionen) lehrt: alle Operatoren  
 $\backslash g \rightarrow \backslash x \rightarrow \dots g \dots$  sind stetig.
- denn die Semantik der (von uns bisher benutzten) AST-Konstruktoren bildet stetige Fkt. auf stetige Fkt. ab
- Ü:  $(\lambda x. \text{if } x = \perp \text{ then } 42 \text{ else } \perp)$  ist nicht stetig.
- Diskussion: eine solche Funktion kann nicht die Semantik eines Programms sein, weil das Halteproblem nicht entscheidbar ist

## Fixpunktberechnung im Interpreter

- Erweiterung der abstrakten Syntax:

```
data Exp = ... | Rec Name Exp
```

- Beispiel

```
App
  (Rec g (Abs v (if v==0 then 0 else 2 + g(v-1))))
  5
```

- Bedeutung:  $\text{Rec } x \ B$  ist Fixpunkt von  $(\lambda x. B)$

- Semantik:  $\frac{\text{wert}(E, (\lambda x. B))(\text{Rec } x \ B), v}{\text{wert}(E, \text{Rec } x \ B, v)}$

- Ü: verwende `Let` statt `App (Abs ..)` ..

- Ü: das Beispiel mit dieser Regel auswerten

## Fixpunkte und Laziness

Fixpunkte existieren in pointed CPOs.

- Zahlen: nicht pointed  
(arithmetische Operatoren sind strikt)
- Funktionen: partiell  $\Rightarrow$  pointed  
( $\perp$  ist überall undefinierte Funktion)
- Daten (Listen, Bäume usw.): pointed:  
(Konstruktoren sind nicht strikt)

Beispiele in Haskell:

```
fix f = f (fix f)
xs = fix $ \ zs -> 1 : zs
ys = fix $ \ zs ->
    0 : 1 : zipWith (+) zs (tail zs)
```

– Typeset by FoilTeX –

72

## Arithmetik mit Bedarfsauswertung

- über  $\mathbb{Q}$  hat  $f = \lambda x.1 + x/4$  einen Fixpunkt ( $4/3$ ),  
aber  $\sup_k f^k \perp = \perp$ , weil die Operationen strikt sind.
- wirklich? Kommt auf die Repräsentation der Zahlen an!  
Op. auf Maschinenzahlen sind strikt. — Aber:
- Zahl als lazy Liste von Ziffern (Bsp: Basis 2)  
 $x = \text{plus } (1 : \text{repeat } 0) (0 : 0 : x) = [1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots]$
- $\ddot{U}$ : bestimme  $y = \sqrt{2} - 1$  aus  $2 = (1 + y)^2$ ,  
d.h., als Fixpunkt von  $\lambda y.(1 - y^2)/2$
- Kombiniere <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.32.4249> (Jerzy Karczmarszuk 1998), <http://joerg.endrullis.de/publications/productivity/>

– Typeset by FoilTeX –

73

## Simultane Rekursion: letrec

- Beispiel (aus: D. Hofstadter, Gödel Escher Bach, 1979)

```
letrec { f = \ x -> if x == 0 then 1
        else x - g(f(x-1))
        , g = \ x -> if x == 0 then 0
        else x - f(g(x-1))
} in f 15
```

Bastelaufgabe: für welche  $x$  gilt  $f(x) \neq g(x)$ ?

- weitere Beispiele:

```
letrec { y = x * x, x = 3 + 4 } in x - y
letrec { f = \ x -> .. f (x-1) } in f 3
```

– Typeset by FoilTeX –

74

## letrec nach rec (falsch)

- Plan: mit Lambda-Ausdrücken für Konstruktor, Selektor

```
LetRec [(n1, x1), .. (nk, xk)] y
=> ( rec t ( let n1 = select1 t
            ..
            nk = selectk t
            in tuple x1 .. xk ) )
( \ n1 .. nk -> y )
```

- benutzt  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle f = f x_1 \dots x_k$
- terminiert nicht, die Auswertungsstrategie des Interpreters ist dafür zu eifrig (*eager*)
- Lösung: tuple direkt unter rec t,  
let .. tuple ..  $\Rightarrow$  tuple (let ..) (let ..)

– Typeset by FoilTeX –

75

## letrec nach rec (richtig)

- Teilausdrücke (für jedes  $i$ )

```
let { n1 = select1 t, .. nk = selectk t
    } in xi
```

äquivalent vereinfachen zu  $t (\backslash n1 \dots nk \rightarrow xi)$

- LetRec [(n1, x1), .. (nk, xk)] y  
 $\Rightarrow$  ( rec t  
 ( tuple ( t ( \ n1 .. nk -> x1 ) )  
 ..  
 ( t ( \ n1 .. nk -> xk ) ) ) )  
 ( \ n1 .. nk -> y ) )
- $\ddot{U}$ : implementiere letrec {f = \_, g = \_} in f 15

– Typeset by FoilTeX –

76

## Übung Fixpunkte

1. Limes der Folge  $F^k(\perp)$  für

```
F h = \ x -> if x > 23 then x - 11
        else h (h (x + 14))
```

2. Ist  $F$  stetig? Gib den kleinsten Fixpunkt von  $F$  an:

```
F h = \ x -> if x >= 2 then 1 + h(x-2)
        else if x == 1 then 1 else h(4) - 2
```

Hat  $F$  weitere Fixpunkte?

3.  $C =$  Menge der Formalen Sprachen über  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  
halbgeordnet durch  $\subseteq$ . ist CPO? pointed?  
 $g : C \rightarrow C : L \mapsto \{e\} \cup \{a\} \cdot L \cdot \{b\}$  ist stetig? Fixpunkt(e)?  
 $h : C \rightarrow C : L \mapsto \{a\} \cup L \cdot \{b\} \cdot (\Sigma^* \setminus L)$

– Typeset by FoilTeX –

77

4. in der Relation  $\subseteq$  auf  $\{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$ : geben Sie eine stetige Funktion an, die zwei verschiedene kleinste Fixpunkte besitzt.
5. Geben Sie Argumente aus dieser Diskussion wieder:  
... distinguish bindings that are self-referentially recursive from non-recursive bindings <https://github.com/ghc-proposals/ghc-proposals/pull/401> (O. Charles, 8. Febr. 2021)

– Typeset by FoilTeX –

78

– Typeset by FoilTeX –

79

## Verpackung und Verteilung

### Haskell-Software-Pakete

- Paket (package) := Quelltexte + Beschreibung von
  - herstellbaren Artefakten (Bibliotheken, Executables, Testfälle)
  - benötigten Paketen (und Versionen-Constraints)Format der Beschreibung: Textdatei `foo.cabal`
- Paket-Sammlung: <https://hackage.haskell.org/>
- Build-Werkzeug: `cabal install|test|repl`
- Installation in `$HOME/.cabal/{bin,lib,*}`, ist projekt-übergreifender Cache

## Kuratierte Paket-Mengen

- Versions-Constraints in Cabal-Files können streng bis großzügig sein (oder ganz fehlen),
- gebaut wird mit den letzten passenden Hackage-Versionen, kann zu nicht reproduzierbaren Builds führen (oder schlimmer, „cabal hell“)
- <https://stackage.org/> definiert *Resolver* (Bsp. LTS-14.14), das sind exakte Versionsnummern von konsistenten Paketmengen.
- Datei `stack.yaml` enthält Resolver und ggf. weitere Paketquellen (z.B. git-clone-URL)
- siehe auch <https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/untutorial/haskell/build/>

## Continuous Intergration

- lokal:
  - im Editor: mit HIE <https://github.com/haskell/haskell-ide-engine>, benutzt Language Server Protocol <https://microsoft.github.io/language-server-protocol/specifications/specification-3-14/>
  - CLI: `ghcid`, siehe <https://github.com/ndmitchell/ghcid>
- remote: Beispiel siehe <https://gitlab.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/haskell-ci-test>

## Haskell-Module

- Modul: benannte Menge von Definitionen (Werte, Typen)

```
module M (M (), foo) where
import C (f); import qualified D ;
data M = A | B
foo :: M -> Bool ; foo x = ... f ..
bar :: Int -> M ; bar y = ... D.g ..
```

- Ziele:
  - Abstraktion (z.B. Konstruktoren von `M` nicht exportiert) damit kann man Invarianten (hier: von `M`) erzwingen
  - getrennte Kompilation, aus `M.hs` entstehen `M.o` und `M.hi`

## Modul-Abhängigkeiten

- Abhängigkeitsgraph  $G$ : Knoten = Module, Kante  $C \rightarrow M$ , falls `module M where import C`
- Kompilation verwendet topologische Ordnung auf  $G$  (Kompilation von  $M$  benötigt  $C.hi$ )  $\Rightarrow G$  kreisfrei
- Kreise entfernen: `Env = Map Name Val, Val = .. | ValClos Name Exp Env` durch Typargumente `Env k v = Map k v`  
Ü: Beziehung zw. `Val` und `Action`?
- Kreiskante  $C \rightarrow M$  entfernen: File `M.hs-boot` Typ- und `data`-Deklarationen *ohne* Konstruktoren  
`module C where import {-# SOURCE #-} M`  
[https://downloads.haskell.org/~ghc/latest/docs/](https://downloads.haskell.org/~ghc/latest/docs/html/users_guide/separate_compilation.html#how-to-compile-mutually-recursive-modules)

```
html/users_guide/separate_compilation.html#
how-to-compile-mutually-recursive-modules
```

## Zustand/Speicher

### Motivation

bisherige Programme sind nebenwirkungsfrei, das ist nicht immer erwünscht:

- direktes Rechnen auf von-Neumann-Maschine: Änderungen im Hauptspeicher
- direkte Modellierung von Prozessen mit Zustandsänderungen ((endl.) Automaten)

Dazu muß semantischer Bereich geändert werden.

- bisher: `Val`, jetzt: `State -> (State, Val)` (dabei ist  $(A, B)$  die Notation für  $A \times B$ )

Semantik von (Teil-)Programmen ist Zustandsänderung.

## Speicher (Daten)

- Implementierung benutzt größenbalancierte Suchbäume

<http://hackage.haskell.org/package/containers/docs/Data-Map.html>

- Notation mit qualifizierten Namen:

```
import qualified Data.Map as M
newtype Addr = Addr Int
type Store = M.Map Addr Val
```

- `newtype`: wie `data` mit genau einem Konstruktor, Konstruktor wird zur Laufzeit *nicht* repräsentiert
- Aktion: liefert neue Speichernbelegung und Resultat

```
newtype Action a =
  Action ( Store -> ( Store, a ) )
```

## Speicher (Operationen)

- `newtype Action a = Action ( Store -> ( Store, a ) )`
- spezifische Aktionen:

```
new :: Val -> Action Addr
get  :: Addr -> Action Val
put  :: Addr -> Val -> Action ()
```

- Aktion ausführen, Resultat liefern (Zielzustand ignorieren)

```
run :: Store -> Action a -> a
```

- Aktionen nacheinander ausführen

```
bind :: Action a -> ... Action b -> Action
```

Aktion ohne Zustandsänderung

```
result :: a -> Action a
```

## Auswertung von Ausdrücken

- Ausdrücke (mit Nebenwirkungen):

```
data Exp = ...
  | New Exp | Get Exp | Put Exp Exp
```

- Resultattyp des Interpreters ändern:

```
value  :: Env -> Exp -> Val
      :: Env -> Exp -> Action Val
```

- semantischen Bereich erweitern:

```
data Val = ... | ValAddr Addr
```

- Aufruf des Interpreters:

```
run Store.empty $ value env0 $ ...
```

## Änderung der Hilfsfunktionen

- bisher:

```
with_int :: Val -> ( Int -> Val ) -> Val
with_int v k = case v of
  ValInt i -> k i
```

- jetzt:

```
with_int :: Action Val
  -> ( Int -> Action Val ) -> Action Val
with_int a k = bind a $ \ v -> case v of
  ValInt i -> k i
```

- Hauptprogramm muß kaum geändert werden (!)

## Variablen?

in unserem Modell haben wir:

- veränderliche Speicherstellen,

- aber immer noch unveränderliche „Variablen“ (lokale Namen)

⇒ der Wert eines Namens kann eine Speicherstelle sein, aber dann immer dieselbe.

## Imperative Programmierung

es fehlen noch wesentliche Operatoren:

- Nacheinanderausführung (Sequenz)
- Wiederholung (Schleife)

diese kann man:

- simulieren (durch `let`)
- als neue AST-Knoten realisieren (Übung)

## Rekursion

mehrere Möglichkeiten zur Realisierung

- im Lambda-Kalkül (in der interpretierten Sprache) mit Fixpunkt-Kombinator
- durch Rekursion in der Gastsprache des Interpreters
- simulieren (in der interpretierten Sprache) durch Benutzung des Speichers

## Rekursion (operational)

- Idee: eine Speicherstelle anlegen und als Vorwärtsreferenz auf das Resultat der Rekursion benutzen
- `Rec n (Abs x b) ==>`  
`a := new 42`  
`put a ( \ x -> let { n = get a } in b )`  
`get a`

## Speicher—Übung

Fakultät imperativ:

```
let { fak = \ n ->
  { a := new 1 ;
    while ( n > 0 )
      { a := a * n ; n := n - 1 ; }
    return a ;
  }
} in fak 5
```

1. Schleife durch Rekursion ersetzen und Sequenz durch `let`:

```
fak = let { a = new 1 }
      in Rec f ( \ n -> ... )
```

2. Syntaxbaumtyp erweitern um Knoten für Sequenz und Schleife

## Monaden

### ... unter verschiedenen Aspekten

- unsere Motivation: semantischer Bereich, `result :: a -> m a` als wirkungslose Aktion, Operator `bind :: m a -> (a -> m b) -> m b` zum Verknüpfen von Aktionen
- auch nützlich: `do`-Notation (anstatt Ketten von `>>=`)
- die Wahrheit: *a monad in X is just a monoid in the category of endofunctors of X*
- die ganze Wahrheit:  
`Functor m => Applicative m => Monad m`
- weitere Anwendungen: IO, Parser-Kombinatoren, weitere semant. Bereiche (Continuations, Typisierung)

## Die Konstruktorklasse Monad

- Definition (in Standardbibliothek)  
`class Monad m where`  
 `return :: a -> m a`  
 `( >>= ) :: m a -> (a -> m b) -> m b`
- Instanz (für benutzerdefinierten Typ)  
`instance Monad Action where`  
 `return = result ; (>>=) = bind`
- Benutzung der Methoden:  
`value e l >>= \ a ->`  
`value e r >>= \ b ->`  
`return ( a + b )`

## Do-Notation für Monaden

```
value e l >>= \ a ->
value e r >>= \ b ->
return ( a + b )
```

`do`-Notation (explizit geklammert):

```
do { a <- value e l
    ; b <- value e r
    ; return ( a + b )
}
```

`do`-Notation (implizit geklammert):

```
do a <- value e l
   b <- value e r
   return ( a + b )
```

Haskell: implizite Klammerung nach `let`, `do`, `case`, `where`

## Beispiele für Monaden

- Aktionen mit Speicheränderung (vorige Woche)  
`Action (Store -> (Store, a))`
- Aktionen mit Welt-Änderung: IO a
- Transaktionen (Software Transactional Memory) STM a
- Vorhandensein oder Fehlen eines Wertes  
`data Maybe a = Nothing | Just a`
- ... mit Fehlermeldung  
`data Either e a = Left e | Right a`
- Nichtdeterminismus (eine Liste von Resultaten): `[a]`
- Parser-Monade (nächste Woche)

## Die IO-Monade

```
data IO a -- abstract
instance Monad IO -- eingebaut
```

```
readFile :: FilePath -> IO String
putStrLn :: String -> IO ()
```

Alle „Funktionen“, deren Resultat von der Außenwelt (Systemzustand) abhängt, haben Resultattyp `IO ...`, sie sind tatsächlich *Aktionen*.

Am Typ einer Funktion erkennt man ihre möglichen Wirkungen bzw. deren garantierte Abwesenheit.

```
main :: IO ()
main = do
  cs <- readFile "foo.bar" ; putStrLn cs
```

## Grundlagen: Kategorien

- *Kategorie*  $C$  hat Objekte  $\text{Obj}_C$  und Morphismen  $\text{Mor}_C$ , jeder Morphismus  $m$  hat als Start ( $S$ ) und Ziel ( $T$ ) ein Objekt, Schreibweise:  $m : S \rightarrow T$  oder  $m \in \text{Mor}_C(S, T)$
- für jedes  $O \in \text{Obj}_C$  gibt es  $\text{id}_O : O \rightarrow O$
- für  $f : S \rightarrow M$  und  $g : M \rightarrow T$  gibt es  $f \circ g : S \rightarrow T$ . es gilt immer  $f \circ \text{id} = f$ ,  $\text{id} \circ g = g$ ,  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Beispiele:

- Set:  $\text{Obj}_{\text{Set}} = \text{Mengen}$ ,  $\text{Mor}_{\text{Set}} = \text{totale Funktionen}$
- Grp:  $\text{Obj}_{\text{Grp}} = \text{Gruppen}$ ,  $\text{Mor}_{\text{Grp}} = \text{Homomorphismen}$
- für jede Halbordnung  $(M, \leq)$ :  $\text{Obj} = M$ ,  $\text{Mor} = (\leq)$
- Hask:  $\text{Obj}_{\text{Hask}} = \text{Typen}$ ,  $\text{Mor}_{\text{Hask}} = \text{Funktionen}$

## Kategorische Definitionen und Sätze

Beispiel: Isomorphie

- eigentlich: Abbildung, die die Struktur (der abgebildeten Objekte) erhält
- Struktur von  $O \in \text{Obj}(C)$  ist aber unsichtbar
- Eigenschaften von Objekten werden beschrieben durch Eigenschaften ihrer Morphismen (vgl. abstrakter Datentyp, API)  
Bsp:  $f : A \rightarrow B$  ist *Isomorphie* (kurz: ist iso), falls es ein  $g : B \rightarrow A$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_A \wedge g \circ f = \text{id}_B$

weiteres Beispiel

- Def:  $m : a \rightarrow b$  monomorph:  $\forall f, g : f \circ m = g \circ m \Rightarrow f = g$
- Satz:  $f \text{ mono} \wedge g \text{ mono} \Rightarrow f \circ g \text{ mono}$ .

## Produkte

- Def:  $P$  ist *Produkt* von  $A_1$  und  $A_2$  mit Projektionen  $\text{proj}_1 : P \rightarrow A_1$ ,  $\text{proj}_2 : P \rightarrow A_2$ , wenn für jedes  $B$  und Morphismen  $f_1 : B \rightarrow A_1$ ,  $f_2 : B \rightarrow A_2$  es existiert genau ein  $g : B \rightarrow P$  mit  $g \circ \text{proj}_1 = f_1$  und  $g \circ \text{proj}_2 = f_2$
- für Set ist das wirklich das Kreuzprodukt
- für die Kategorie einer Halbordnung?
- für Gruppen? (Beispiel?)

## Dualität

- Wenn ein Begriff kategorisch definiert ist, erhält man den dazu *dualen* Begriff durch Spiegeln aller Pfeile
- Bsp: dualer Begriff zu *Produkt* (heißt *Summe*)  
Definition hinschreiben, Beispiele angeben
- Ü: dualer Begriff zu: mono (1. allgemein, 2. Mengen)
- entsprechend: die *duale Aussage*  
diese gilt gdw. die originale (primale) Aussage gilt
- Ü: duale Aussage für Komposition von mono.

## Funktoren

- Def: Funktor  $F$  von Kategorie  $C$  nach Kategorie  $D$ :
  - Wirkung auf Objekte:  $F_{\text{Obj}} : \text{Obj}(C) \rightarrow \text{Obj}(D)$
  - Wirkung auf Pfeile:  
 $F_{\text{Mor}} : (g : s \rightarrow t) \mapsto (g' : F_{\text{Obj}}(s) \rightarrow F_{\text{Obj}}(t))$   
mit den Eigenschaften:
    - $F_{\text{Mor}}(\text{id}_o) = \text{id}_{F_{\text{Obj}}(o)}$
    - $F_{\text{Mor}}(g \circ_C h) = F_{\text{Mor}}(g) \circ_D F_{\text{Mor}}(h)$
- Bsp: Funktoren zw. Kategorien von Halbordnungen?
- ```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
Beispiele: List, Maybe, Action
```

## Die Kleisli-Konstruktion

- Plan: für Kategorie  $C$ , Endo-Funktor  $F : C \rightarrow C$  definiere sinnvolle Struktur auf Pfeilen  $s \rightarrow Ft$
- Durchführung: die Kleisli-Kategorie  $K$  von  $F$ :  
 $\text{Obj}(K) = \text{Obj}(C)$ , Pfeile:  $s \rightarrow Ft$
- ...  $K$  ist tatsächlich eine Kategorie, wenn:
  - identische Morphismen (`return`), Komposition (`>=>`)
  - mit passenden Eigenschaften  
( $F, \text{return}, (>=>)$ ) heißt dann *Monade*

Diese Komposition ist

$f \gg= g = \backslash x \rightarrow (f x \gg= g)$

Aus o.g. Forderung ( $K$  ist Kategorie) ergibt sich Spezifikation für `return` und `>>=`

## Functor, Applicative, Monad

```
https://wiki.haskell.org/
Functor-Applicative-Monad_Proposal
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
class Functor f => Applicative f where
  pure :: a -> f a
  (<*>) :: f (a -> b) -> (f a -> f b)
class Applicative m => Monad m where
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
eine Motivation: effizienterer Code für >>=,
wenn das rechte Argument eine konstante Funktion ist
(d.h. die Folge-Aktion hängt nicht vom Resultat der ersten
Aktion ab: dann ist Monad nicht nötig, es reicht Applicative)
```

## Die Maybe-Monade

```
data Maybe a = Nothing | Just a
instance Monad Maybe where ...
Beispiel-Anwendung:
case ( evaluate e l ) of
  Nothing -> Nothing
  Just a -> case ( evaluate e r ) of
    Nothing -> Nothing
    Just b -> Just ( a + b )
mittels der Monad-Instanz von Maybe:
evaluate e l >>= \ a ->
  evaluate e r >>= \ b ->
  return ( a + b )
Ü: dasselbe mit do-Notation
```

## List als Monade

```
instance Monad [] where
  return = \ x -> [x]
  m >>= f = case m of
    []     -> []
    x : xs -> f x ++ ( xs >>= f )
```

Beispiel:

```
do a <- [ 1 .. 4 ]
   b <- [ 2 .. 3 ]
   return ( a * b )
```

Anwendung: Ablaufsteuerung für Suchverfahren

## Monaden: Zusammenfassung

- verwendet zur Definition semantischer Bereiche,
- Monade = Monoid über Endofunktoren in Hask, (Axiome für `return`, `>=>` bzw. `>>=`)
- Notation `do { x <- foo ; bar ; .. }` (`>>=` ist das benutzer-definierte Semikolon)
- Grundlagen: Kategorien-Theorie (ca. 1960), in Funktl. Prog. seit ca. 1990 <http://homepages.inf.ed.ac.uk/wadler/topics/monads.html>
- in anderen Sprachen: F#: *Workflows*, C#: LINQ-Syntax
- GHC ab 7.10: `Control.Applicative: pure` und `<*>` (= `return` und eingeschränktes `>>=`)

## Monaden-Transformatoren

- Motivation: Kombination verschiedener Semantiken:

- Zustands-Änderung (*Action*)
- Fehlschlagen der Rechnung (*Maybe*)
- Schritt-Zählen
- Logging

in *einer* Monade

- diese nicht selbst schreiben, sondern Monaden-Transformatoren verwenden, z.B.

```
type Sem = ExceptT Err (StateT Store Identity)
```

- Standard-Bibliotheken dafür: `transformers`, `mtl`

## Der Zustands-Transformator

```
newtype StateT s m a
  = StateT { runStateT :: s -> m (a,s) }
```

- die elementaren Operationen:

```
get :: Monad m => StateT s m s
put :: Monad m => s -> StateT s m ()
```

- `instance Monad m => Monad (StateT s m)`

- Anwendung auf

```
newtype Identity a = Identity { runIdentity :: a }
```

```
ergibt type State s = StateT s Identity
```

## Der Ausnahme-Transformator MaybeT

```
newtype MaybeT m a =
  MaybeT { runMaybeT :: m (Maybe a) }
```

- Anwendung im Interpreter:

```
type Sem = StateT Store (MaybeT Identity)
with_int :: Sem Val->(Val -> Sem r)->Sem r
with_int a k = a >>= \ case
  ValInt i -> k i ; _ -> lift Nothing
```

- benutzt Einbettung der inneren Monade:

```
class MonadTrans t where
  lift :: Monad m => m a -> t m a
instance MonadTrans (StateT s)
```

## Der Ausnahme-Transformator ExceptT

- wie `MaybeT`, aber mit Fehlermeldungen (Exceptions)

```
newtype ExceptT e m a = ExceptT (m (Either e a))
instance Monad m => Monad (ExceptT e m)
instance MonadTrans (ExceptT e)
```

- Operationen:

```
runExceptT :: ExceptT e m a -> m (Either e a)
throwE :: Monad m => e -> ExceptT e m a
catchE :: Monad m => ExceptT e m a -> (e -> ..) ->
```

- Ü: verwende `Sem = StateT (ExceptT Err Id.)` mit sinnvollem `data Err = ..`

- Ü: Unterschied zu `ExceptT Err (StateT Id.)`

## Bibliotheken für Monaden-Transformatoren

- gemeinsame Grundlage: Mark P Jones: *Functional Programming with Overloading and Higher-Order Polymorphism*, AFP 1995, <http://web.cecs.pdx.edu/~mpj/pubs/springschool.html> (S. 36 ff.)

- <https://hackage.haskell.org/package/transformers>: wie hier beschrieben

- <https://hackage.haskell.org/package/mtl>: zusätzliche Typklassen und Instanzen

```
class Monad m => MonadState s m | m -> s where
  get :: ... ; put :: ...
instance MonadState s m => MonadState s (MaybeT m)
```

dadurch braucht man fast keine `lift` zu schreiben

## Übung

- der identische Morphismus jedes Objektes ist eindeutig
- was ist der duale Begriff zu Monomorphismus?  
Def., Bedeutung für Mengen
- Beweise: für das (kategorisch definierte) Produkt  $P$  von endlichen Mengen  $A_1, A_2$  gilt:  $|P| = |A_1 \times A_2|$ .
  1. (Musterlösung)  $|P| \geq |A_1 \times A_2|$ : indirekter Beweis.  
Falls  $|P| < |A_1 \times A_2|$ , wähle  $B = A_1 \times A_2$ ,  $f_i(x_1, x_2) = x_i$ .  
Dann ist  $g$  nicht injektiv: es gibt  $x = (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) = y$ , mit  $g(x) = g(y)$ .  
Für diese  $x, y$  gilt  $x_i \neq y_i$  für wenigstens ein  $i \in \{1, 2\}$ .

– Typeset by FoilTeX –

120

Aus  $g \circ \text{proj}_i = f_i$  folgt  $x_i = f_i(x) = (g \circ \text{proj}_i)(x) = \text{proj}_i(g(x)) = \text{proj}_i(g(y)) = (g \circ \text{proj}_i)(y) = f_i(y) = y_i$ ,  
Widerspruch.

2. (Aufgabe)  $|P| \leq |A_1 \times A_2|$

- Kategorie mit gerichteten Graphen als Objekte,  
 $f : V(G) \rightarrow V(H)$  ist Morphismus, falls  
 $\forall x, y : (x, y) \in E(G) \iff (f(x), f(y)) \in E(H)$ .  
Was bedeuten dort mono, epi?  
Produkt, Summe? Welche Graph-Operationen (aus VL Modellierung) haben die passenden Eigenschaften?
- Funktor- und Monadengesetze (mit leancheck in ghci)

```
cabal install --lib leancheck
```

– Typeset by FoilTeX –

121

```
import Test.LeanCheck
import Test.LeanCheck.Function
-- Kleisli-Komposition:
import Control.Monad ((>=>))

:set -XPatternSignatures

-- return ist rechts neutral
check $ \ (f :: Bool -> Maybe Bool) x -> (f x == (return x))

-- ein Test, der zeigt, daß eine falsche Aussage er
check $ \ (f :: Bool -> Maybe Bool) x -> (f x == (f x))
```

- falsche Functor-/Monad-Instanzen für Maybe, List, Tree  
(d.h. typkorrekt, aber semantisch falsch)

– Typeset by FoilTeX –

122

- StateT Int zum Zählen der Auswertungsschritte  
(Aufrufe von value) einbauen

```
import qualified Control.Monad.Trans.State as S
import qualified Control.Monad.Trans.Class as T
import Numeric.Natural
```

```
type Domain = S.StateT Natural Action Val
```

```
value :: Env Name Val -> Exp -> Domain
```

```
...
  Put e f -> with_addr (value env e) $ \ a ->
    with_value (value env f) $ \ v ->
      T.lift (put a v) >>= \ _ ->
        return ValUnit
```

```
test3 = print $ run state0 $ flip S.runStateT 0 $ v
```

– Typeset by FoilTeX –

123

```
$ Let "a" (New $ LitInt 0) ...
```

- WriterT [String] zur Protokollierung (Argumente und Resultat von value)
- Lesen der Umgebung mit ReaderT Env. Änderung der Umgebung (in Let, App) durch welche Funktion?

– Typeset by FoilTeX –

124

– Typeset by FoilTeX –

126

– Typeset by FoilTeX –

127

## Kombinator-Parser

### Datentyp für Parser

- `data Parser c a = Parser ( [c] -> [ (a, [c]) ] )`
  - über Eingabestrom von Zeichen (Token) `c`,
  - mit Resultattyp `a`,
  - nichtdeterministisch (List).
- Beispiel-Parser, aufrufen mit:

```
parse :: Parser c a -> [c] -> [(a,[c])]  
parse (Parser f) w = f w
```
- alternative Definition:

```
type Parser c a = StateT [c] [] a
```

## Elementare Parser (I)

```
-- | das nächste Token  
next :: Parser c c  
next = Parser $ \ toks -> case toks of  
    [] -> []  
    ( t : ts ) -> [ ( t, ts ) ]  
-- | das Ende des Tokenstroms  
eof :: Parser c ()  
eof = Parser $ \ toks -> case toks of  
    [] -> [ ( (), [] ) ]  
    _ -> []  
-- | niemals erfolgreich  
reject :: Parser c a  
reject = Parser $ \ toks -> []
```

## Monadisches Verketteten von Parsern

Definition:

```
instance Monad ( Parser c ) where  
    return x = Parser $ \ s -> return ( x, s )  
    p >>= g = Parser $ \ s -> do  
        ( a, t ) <- parse p s  
        parse (g a) t
```

beachte: das `return/do` gehört zur List-Monade

Anwendungsbeispiel:

```
p :: Parser c (c,c)  
p = do x <- next ; y <- next ; return (x,y)  
mit Operatoren aus Control.Applicative:  
p = (,) <$> next <*> next
```

## Elementare Parser (II)

```
satisfy :: ( c -> Bool ) -> Parser c c  
satisfy p = do  
    x <- next  
    if p x then return x else reject  
  
expect :: Eq c => c -> Parser c c  
expect c = satisfy ( == c )  
  
ziffer :: Parser Char Integer  
ziffer = ( \ c -> fromIntegral  
            $ fromEnum c - fromEnum '0' )  
    <$> satisfy Data.Char.isDigit
```

## Kombinatoren für Parser (I)

- Folge (and then) (ist `>>=` aus der Monade)
- Auswahl (oder) (ist Methode aus `class Alternative`)

```
( <|> ) :: Parser c a -> Parser c a -> Parser c a  
Parser f <|> Parser g = Parser $ \ s -> f s ++ g s
```

- Wiederholung (beliebig viele, wenigstens einer)

```
many, some :: Parser c a -> Parser c [a]  
many p = some p <|> return []  
some p = (:) <$> p <*> many p
```

```
zahl :: Parser Char Integer =  
    foldl ( \ a z -> 10*a+z ) 0 <$> some ziffer
```

## Kombinatoren für Parser (II)

(aus `Control.Applicative`)

- der zweite Parser hängt nicht vom ersten ab:

```
( <*> ) :: Parser c ( a -> b )  
        -> Parser c a -> Parser c b
```

- eines der Resultate wird exportiert, anderes ignoriert

```
( <*> ) :: Parser a -> Parser b -> Parser a  
( * ) :: Parser a -> Parser b -> Parser b
```

Eselsbrücke: Ziel des „Pfeiles“ wird benutzt

- der erste Parser ändert den Zustand nicht (`fmap`)

```
( <$> ) :: ( a -> b ) -> Parser a -> Parser b
```

## Kombinator-Parser und Grammatiken

- CFG-Grammatik mit Regeln  $S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \epsilon$  entspricht

```
s :: Parser Char ()  
s = ( expect 'a' *> s *> expect 'b' *> s )  
    <|> return ()
```

Anwendung: `parse (s <*> eof) "abab"`

- CFG: Variable = Parser, nur `<*>` und `<|>` benutzen
- höherer Ausdrucksstärke (Chomsky-Stufe 1, 0) durch
  - Argumente ( $\approx$  unendlich viele Variablen)
  - Monad (`bind`) statt `Applicative` (abhängige Fortsetzung)

## Parser für Operator-Ausdrücke

- `chainl :: Parser c a -> Parser c ( a -> a -> -> Parser c a`

```
chainl p op = (foldl ...)  
    <$> p <*> many ( (,) <$> op <*> p )
```
- `expression :: [[Parser c ( a -> a -> a )]]`

```
-> Parser c a -> Parser c a  
expression opss atom =  
    foldl ( \ p ops -> chainl ... ) atom opss
```
- `exp = expression`

```
[ [ string "*" *> return Times ]  
  , [ string "+" *> return Plus ] ]  
( Exp.Const <$> zahl )
```

## Robuste Parser-Bibliotheken

- Designfragen:
  - Nichtdeterminismus einschränken
  - Backtracking einschränken
  - Fehlermeldungen (Quelltextposition)
- klassisches Beispiel: Parsec (Autor: Daan Leijen)  
<http://hackage.haskell.org/package/parsec>
- Ideen verwendet in vielen anderen Bibliotheken, z.B.  
<http://hackage.haskell.org/package/attoparsec>  
(benutzt z.B. in  
<http://hackage.haskell.org/package/aeson>)

## Asymmetrische Komposition

gemeinsam:

```
(<|>) :: Parser c a -> Parser c a
      -> Parser c a
Parser p <|> Parser q = Parser $ \ s -> ...
```

- symmetrisch: `p s ++ q s`
- asymmetrisch: `if null p s then q s else p s`

Anwendung: `many` liefert nur maximal mögliche Wiederholung (nicht auch alle kürzeren)

## Nichtdeterminismus einschränken

- Nichtdeterminismus = Berechnungsbaum = Backtracking
  - asymmetrisches `p <|> q`: probiere erst `p`, dann `q`
  - häufiger Fall: `p` lehnt „sofort“ ab
- Festlegung (in Parsec): wenn `p` wenigstens ein Zeichen verbraucht, dann wird `q` nicht benutzt (d. h. `p` muß erfolgreich sein)
- Backtracking dann nur durch `try p <|> q`

## Fehlermeldungen

- Fehler = Position im Eingabestrom, bei der es „nicht weitergeht“
- und auch durch Backtracking keine Fortsetzung gefunden wird
- Fehlermeldung enthält:
  - Position
  - Inhalt (Zeichen) der Position
  - Menge der Zeichen mit Fortsetzung

## Übung Kombinator-Parser

- Bezeichner parsen (alphabetisches Zeichen, dann Folge von alphanumerischen Zeichen)
- Whitespace ignorieren (verwende `Data.Char.isSpace`)
- Operator-Parser vervollständigen (`chain`,...)
- konkrete Haskell-ähnliche Syntax realisieren
  - `if .. then .. else ..`
  - `let { .. = .. } in ..`
  - `\ x y z -> ..`
  - `f a b c`

## Pretty-Printing (I)

John Hughes's and Simon Peyton Jones's Pretty Printer Combinators

Based on *The Design of a Pretty-printing Library in Advanced Functional Programming*, Johan Jeuring and Erik Meijer (eds), LNCS 925

<http://hackage.haskell.org/packages/archive/pretty/1.0.1.0/doc/html/Text-PrettyPrint-HughesPJ.html>

## Pretty-Printing (II)

- `data Doc` abstrakter Dokumententyp, repräsentiert Textblöcke
- Konstruktoren:  

```
text :: String -> Doc
```
- Kombinatoren:  

```
vcat      :: [ Doc ] -> Doc -- vertikal
hcat, hsep :: [ Doc ] -> Doc -- horizontal
```
- Ausgabe: `render :: Doc -> String`

## Bidirektionale Programme

Motivation: `parse` und (`pretty`-)print aus *einem* gemeinsamen Quelltext

Tillmann Rendel and Klaus Ostermann: *Invertible Syntax Descriptions*, Haskell Symposium 2010

<http://lambda-the-ultimate.org/node/4191>

Datentyp

```
data PP a = PP
  { parse :: String -> [(a,String)]
  , print :: a -> Maybe String
  }
```

Spezifikation, elementare Objekte, Kombinatoren?

## Ablaufsteuerung/Continuations

### Definition

(alles nach: Turbak/Gifford Ch. 17.9)

CPS-Transformation (continuation passing style):

- original: Funktion gibt Wert  $v$  zurück

```
f = \ x y -> let { ... } in v
```

- cps: Funktion erhält zusätzliches Argument, das ist eine *Fortsetzung* (continuation), die den Wert verarbeitet:

```
f_cps = \ x y k -> let { ... } in k v
```

aus  $g (f\ 3\ 2)$

wird  $\ k \rightarrow f\_cps\ 3\ 2\ \$ \ v \rightarrow g\_cps\ v\ k$

## Motivation

Funktionsaufrufe in CPS-Programm kehren nie zurück, können also als Sprünge implementiert werden!

CPS als einheitlicher Mechanismus für

- Linearisierung (sequentielle Anordnung von primitiven Operationen)
- Ablaufsteuerung (Schleifen, nicht-lokale Sprünge)
- Unterprogramme (Übergabe von Argumenten und Resultat)
- Unterprogramme mit mehreren Resultaten

## CPS für Linearisierung

$(a + b) * (c + d)$  wird übersetzt (linearisiert) in

```
( \ top ->
  plus a b $ \ x ->
  plus c d $ \ y ->
  mal x y top
) ( \ z -> z )
```

```
plus x y k = k (x + y)
```

```
mal x y k = k (x * y)
```

später tatsächlich als Programmtransformation (Kompilation)

## CPS für Resultat-Tupel

wie modelliert man Funktion mit mehreren Rückgabewerten?

- benutze Datentyp Tupel (Paar):

```
f : A -> (B, C)
```

- benutze Continuation:

```
f/cps : A -> (B -> C -> D) -> D
```

## CPS/Tupel-Beispiel

erweiterter Euklidischer Algorithmus:

```
prop_egcd x y =
  let (p,q) = egcd x y
  in (p*x + q*y) == gcd x y
```

```
egcd :: Integer -> Integer
      -> ( Integer, Integer )
```

```
egcd x y = if y == 0 then ???
           else let (d,m) = divMod x y
                  (p,q) = egcd y m
                 in ???
```

vervollständige, übersetze in CPS

## CPS für Ablaufsteuerung

Wdhlg: CPS-Transformation von  $1 + (2 * (3 - (4 + 5)))$  ist

```
\ top -> plus 4 5 $ \ a ->
  minus 3 a $ \ b ->
  mal 2 b $ \ c ->
  plus 1 c top
```

Neu: **label** und **jump**

```
1 + label foo (2 * (3 - jump foo (4 + 5)))
```

**Semantik:** durch **label** wird die aktuelle Continuation benannt:  $foo = \ c \rightarrow plus\ 1\ c\ top$

und durch **jump** benutzt:

```
\ top -> plus 4 5 $ \ a -> foo a
```

**Vergleiche:** **label:** Exception-Handler deklarieren, **jump:** Exception auslösen

## Semantik für CPS

Semantik von Ausdruck  $x$  in Umgebung  $E$  ist Funktion von Continuation nach Wert (Action)

```
value(E, label L B) = \ k ->
  value (E[L:=k], B) k
value (E, jump L B) = \ k ->
  value (E, L) $ \ k' ->
  value (E, B) k'
```

**Beispiel 1:**

```
value (E, label x x)
= \ k -> value (E[x:=k], x) k
= \ k -> k k
```

**Beispiel 2**

```
value (E, jump (label x x) (label y y))
= \ k ->
  value (E, label x x) $ \ k' ->
  value (E, label y y) k'
= \ k ->
  ( \ k0 -> k0 k0 ) $ \ k' ->
  value (E, label y y) k'
= \ k ->
  ( \ k0 -> k0 k0 ) $ \ k' ->
  ( \ k1 -> k1 k1 ) k'
```

## Semantik

semantischer Bereich:

```
type Continuation a = a -> Action Val
newtype CPS a
  = CPS ( Continuation a -> Action Val )
value :: Env -> Exp -> CPS Val
```

Plan:

- abstrakte Syntax: Label, Jump, konkrete S. (Parser)
- Semantik:
  - Verkettung durch >>= aus instance Monad CPS
  - Einbetten von Action Val durch lift
  - value für bestehende Sprache
  - value für label und jump

## CPS als Monade

- ein CPS-transformiertes Programm ausführen

```
feed :: CPS a -> ( a -> Action Val )
      -> Action Val
feed ( CPS s ) c = s c
```

- Spezifikation der Monaden-Operationen

```
feed ( return x ) c = c x
feed ( s >>= f ) c =
  feed s ( \ x -> feed ( f x ) c )
```

- Einbettung von Aktionen (Bsp: put,get,new)

```
lift :: Action a -> CPS a
```

## Der CPS-Transformator

- <https://hackage.haskell.org/package/transformers/docs/Control-Monad-Trans-Cont.html> (Ross Paterson, 2001)
- ```
newtype ContT r m a =
  ContT { runContT :: (a -> m r) -> m r }
```
- Beziehung zu voriger Folie:  
CPS = ContT Val Action, feed = runContT,  
lift = Control.Monad.Trans.Class.lift
- Ü: vergleiche unser label/jump mit callCC
- Ü: delimited Continuations (reset,shift)  
Kenichi Asai and Oleg Kiselyov, CW 2011  
<https://okmij.org/ftp/continuations/#tutorial>

## Übungsaufgaben

Rekursion (bzw. Schleifen) mittels Label/Jump  
(und ohne Rec oder Fixpunkt-Kombinator)  
folgende Beispiele sind aus Turbak/Gifford, DCPL, 9.4.2

- Beschreibe die Auswertung (Datei ex4.hs)

```
let { d = \ f -> \ x -> f (f x) }
in let { f = label l ( \ x -> jump l x ) }
  in f d ( \ x -> x + 1 ) 0
```

- jump (label x x) (label y y)

- Ersetze undefined, so daß f x = x! (Datei ex5.hs)

```
let { triple x y z = \ s -> s x y z
```

```
; fst t = t ( \ x y z -> x )
; snd t = t ( \ x y z -> y )
; thd t = t ( \ x y z -> z )
; f x = let { p = label start undefined
           ; loop = fst p ; n = snd p
           } in if 0 == n then a
         else loop (triple loop
} in f 5
```

## Typen

### Grundlagen

Typ = statische Semantik  
(Information über mögliches Programm-Verhalten, erhalten ohne Programm-Ausführung)  
formale Beschreibung:

- $P$ : Menge der Ausdrücke (Programme)
- $T$ : Menge der Typen
- Aussagen  $p :: t$  (für  $p \in P, t \in T$ )
  - prüfen oder
  - herleiten (inferieren)

## Inferenzsystem für Typen (Syntax)

- Grundbereich: Aussagen der Form  $E \vdash X : T$   
(in Umgebung  $E$  hat Ausdruck  $X$  den Typ  $T$ )
- Menge der Typen:
  - primitiv: Int, Bool
  - zusammengesetzt:
    - \* Funktion  $T_1 \rightarrow T_2$
    - \* Verweistyp ??
    - \* Tupel  $(T_1, \dots, T_n)$ , einschl.  $n = 0$
- Umgebung bildet Namen auf Typen ab

## Inferenzsystem für Typen (Semantik)

- Axiome f. Literale:  $E \vdash \text{Zahl-Literal} : \text{Int}, \dots$
  - Regel für prim. Operationen:  $\frac{E \vdash X : \text{Int}, E \vdash Y : \text{Int}}{E \vdash (X + Y) : \text{Int}}, \dots$
  - Abstraktion/Applikation: ...
  - Binden/Benutzen von Bindungen: ...
- hierbei (vorläufige) Design-Entscheidungen:
- Typ eines Ausdrucks wird inferiert
  - Typ eines Bezeichners wird ...
    - in Abstraktion: deklariert
    - in Let: inferiert

## Inferenz für Let

(alles ganz analog zu Auswertung von Ausdrücken)

- Regeln für Umgebungen
  - $E[v := t] \vdash v : t$
  - $\frac{E \vdash v' : t'}{E[v := t] \vdash v' : t'}$  für  $v \neq v'$
- Regeln für Bindung:

$$\frac{E \vdash X : s, \quad E[v := s] \vdash Y : t}{E \vdash \text{let } v = X \text{ in } Y : t}$$

## Applikation und Abstraktion

- Applikation:

$$\frac{E \vdash F : T_1 \rightarrow T_2, \quad E \vdash A : T_1}{E \vdash (FA) : T_2}$$

vergleiche mit *modus ponens*

- Abstraktion (mit deklariertem Typ der Variablen)

$$\frac{E[v := T_1] \vdash X : T_2}{E \vdash (\lambda(v :: T_1)X) : T_1 \rightarrow T_2}$$

dazu Erweiterung der abstrakten Syntax

## Eigenschaften des Typsystems

Wir haben hier den *einfach getypten Lambda-Kalkül* nachgebaut:

- jedes Programm hat höchstens einen Typ
- nicht jedes Programm hat einen Typ.  
Der  $Y$ -Kombinator  $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$  hat keinen Typ
- jedes getypte Programm terminiert  
(Begründung: bei jeder Applikation  $FA$  ist der Typ von  $FA$  kleiner als der Typ von  $F$ )

Übung: typisiere `t t t t succ 0` mit  
`succ = \ x -> x + 1` und `t = \ f x -> f (f x)`

## Übung

1. Typisierung für Vergleichs-Operatoren, If-Then-Else, New/Get/Put
2. Tupel: abstrakte Syntax, dynamische Semantik, statische Semantik
3. konkrete Syntax (Parser): Let, Abs, App, Tupel (Syntax immer wie in Haskell)
4. konkrete Syntax: AbsTyped (dazu brauchen wir Parser für Typ-Ausdrücke)

## Typ-Rekonstruktion

### Motivation

- Bisher: Typ-Deklarationspflicht für Variablen in Lambda.
- scheint sachlich nicht nötig. In vielen Beispielen kann man die Typen einfach rekonstruieren:

```
let { t = \ f x -> f (f x)
    ; s = \ x -> x + 1
    } in t s 0
```

- Diesen Vorgang automatisieren!

## Realisierung mit Constraints

Inferenz für Aussagen der Form  $E \vdash X : (T, C)$

- $E$ : Umgebung (Name  $\rightarrow$  Typ)
- $X$ : Ausdruck (Exp)
- $T$ : Typ
- $C$ : Menge von Typ-Constraints

wobei

- Menge der Typen  $T$  erweitert um Unbekannte  $U$
- Constraint: Paar von Typen  $(T_1, T_2)$
- Lösung eines Constraints-System  $C$ :  
Substitution  $\sigma : U \rightarrow T$  mit  $\forall (T_1, T_2) \in C : T_1\sigma = T_2\sigma$

Bsp:  $U = \{u, v, w\}, C = \{(u, \text{Int} \rightarrow v), (w \rightarrow \text{Bool}, u)\},$   
 $\sigma = \{(u, \text{Int} \rightarrow \text{Bool}), (v, \text{Bool}), (w, \text{Int})\}$

## Inferenzregeln f. Rekonstruktion (Plan)

Plan:

- Aussage  $E \vdash X : (T, C)$  ableiten,
- dann  $C$  lösen (allgemeinsten Unifikator  $\sigma$  bestimmen)
- dann ist  $T\sigma$  der Typ von  $X$  (in Umgebung  $E$ )

Für (fast) jeden Teilausdruck eine eigene („frische“) Typvariable ansetzen, Beziehungen zwischen Typen durch Constraints ausdrücken.

Inferenzregeln? Lösbarkeit? Implementierung? — Testfall:

```
\ f g x y ->
  if (f x y) then (x+1) else (g (f x True))
```

## Inferenzregeln f. Rekonstruktion

- primitive Operationen (Beispiel)

$$\frac{E \vdash X_1 : (T_1, C_1), \quad E \vdash X_2 : (T_2, C_2)}{E \vdash X_1 + X_2 : (\text{Int}, \{T_1 = \text{Int}, T_2 = \text{Int}\} \cup C_1 \cup C_2)}$$

- Applikation

$$\frac{E \vdash F : (T_1, C_1), \quad E \vdash A : (T_2, C_2)}{E \vdash (FA) : \dots}$$

- Abstraktion

$$\frac{\dots}{E \vdash \lambda x. B : \dots}$$

- (Ü) Konstanten, Variablen, if/then/else

## Implementierung Constraint-Erzeugung

- durch Stapelung von Monaden-Transformatoren

```
type Domain a =
  WriterT [Con] (StateT Int (Except T.Text)) a
```

- `StateT Int` zum Erzeugen *frischer* Unbekannter
- `WriterT [Constraint]` zum Aufsammeln der Constraints
- Programm zur Typisierung bleibt (im wesentlichen), aber  
`if t1 == t2 then return foo else reject ..`  
wird ersetzt durch  
`do tell (Con t1 t2); return foo`
- damit `Except` beim Erzeugen der Constraints unnötig  
(aber beim Lösen der Constraints)

## Substitutionen (Definition)

- Signatur  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \dots \cup \Sigma_k$ ,
- $\text{Term}(\Sigma, V)$  ist kleinste Menge  $T$  mit  $V \subseteq T$  und  
 $\forall 0 \leq i \leq k, f \in \Sigma_i, t_1 \in T, \dots, t_i \in T : f(t_1, \dots, t_i) \in T$ .  
(hier Anwendung für Terme, die Typen beschreiben)
- Substitution: partielle Abbildung  $\sigma : V \rightarrow \text{Term}(\Sigma, V)$ ,  
Definitionsbereich:  $\text{dom } \sigma$ , Bildbereich:  $\text{img } \sigma$ .
- Substitution  $\sigma$  auf Term  $t$  anwenden:  $t\sigma$
- $\sigma$  heißt *pur*, wenn kein  $v \in \text{dom } \sigma$  als Teilterm in  $\text{img } \sigma$  vorkommt.  
Beispiele (pur oder nicht?)  
 $\{(X, f(Y)), (Y, a)\}, \{(X, f(a)), (Y, a)\}, \{(X, Y), (Y, f(X))\}$

## Substitutionen: Produkt

Produkt von Substitutionen:  $t(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (t\sigma_1)\sigma_2$

Beispiel 1:

$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto a\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$ .

Beispiel 2 (nachrechnen!):

$\sigma_1 = \{X \mapsto Y\}, \sigma_2 = \{Y \mapsto X\}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2$

Eigenschaften:

- $\sigma$  pur  $\Rightarrow \sigma$  idempotent:  $\sigma \circ \sigma = \sigma$
- $\sigma_1$  pur  $\wedge \sigma_2$  pur impliziert nicht  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  pur

Implementierung:

```
import Data.Map
type Substitution = Map Identifier Term
times :: Substitution -> Substitution -> Sub
```

## Substitutionen: Ordnung

Substitution  $\sigma_1$  ist *allgemeiner als* Substitution  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 \lesssim \sigma_2 \iff \exists \tau : \sigma_1 \circ \tau = \sigma_2$$

Beispiele:

- $\{X \mapsto Y\} \lesssim \{X \mapsto a, Y \mapsto a\}$ ,
- $\{X \mapsto Y\} \lesssim \{Y \mapsto X\}$ ,
- $\{Y \mapsto X\} \lesssim \{X \mapsto Y\}$ .

Eigenschaften

- Relation  $\lesssim$  ist Prä-Ordnung ( $\dots, \dots$ , aber nicht  $\dots$ )
- Die durch  $\lesssim$  erzeugte Äquivalenzrelation ist die  $\dots$

## Unifikation—Definition

Unifikationsproblem

- Eingabe: Terme  $t_1, t_2 \in \text{Term}(\Sigma, V)$
- Ausgabe: ein allgemeinsten Unifikator (mgu): Substitution  $\sigma$  mit  $t_1\sigma = t_2\sigma$ .

(allgemeinst: infimum bzgl.  $\lesssim$ )

Satz: jedes Unifikationsproblem ist

- entweder gar nicht
- oder bis auf Umbenennung eindeutig lösbar.

## Unifikation—Algorithmus

- Typ

```
mgu :: Term -> Term -> Maybe Substitution
-- oder ... -> Except Text Substitution
```

- Implementierung:  $\text{mgu}(s, t)$  nach Fallunterscheidung

- $s$  ist Variable: ...
- $t$  ist Variable: symmetrisch
- $s = (s_1 \rightarrow s_2)$  und  $t = (t_1 \rightarrow t_2)$ : ...
- für andere zusammengesetzte Typen (Tupel, Verweis) entsprechend

## Unifikation—Komplexität

Bemerkungen:

- gegebene Implementierung ist korrekt, übersichtlich, aber nicht effizient,
- (Ü) es gibt Unif.-Probl. mit exponentiell großer Lösung,
- eine komprimierte Darstellung davon kann man aber in Polynomialzeit ausrechnen.

Bsp: Signatur  $\{f/2, a/0\}$ ,

unifiziere  $f(X_1, f(X_2, f(X_3, f(X_4, a))))$  mit  
 $f(f(X_2, X_2), f(f(X_3, X_3), f(f(X_4, X_4), f(a, a))))$

## Hausaufgaben

- Typrekonstruktion: Quelltexte zur Berechnung von Typ und Constraints ergänzen. (Quelltexte zur Lösung der Constraints werden noch gegeben.)

Insbesondere: die alte Implementierung

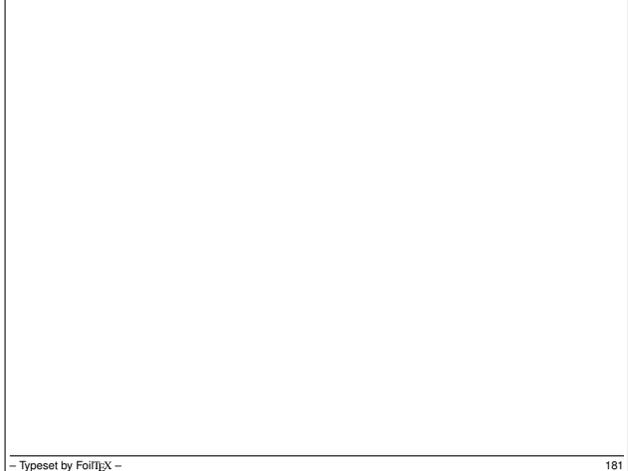
```
with_int
  :: Domain Val -> ( () -> Domain Val) ->
with_int a f = a >>= \ v -> case v of
  Type.Int -> f ()
  _ -> reject "Integer expected"
```

ist jetzt falsch, man darf hier nicht ablehnen, sondern muß ein Constraint ausgeben.

- diskutiere Typisierung (evtl. Typrekonstruktion) für Continuations.

Vergleiche mit Typ von `callCC` aus `transformers` (dieser Type ist aber polymorph, wir sind hier monomorph)

- (noch von früher) Typisierung für Tupel
- konkrete Syntax (Parser, Prettyprinter)



## Plan für Compiler

### Transformationen/Ziel

- continuation passing (Programmablauf explizit)
- closure conversion (alle Umgebungen explizit)
- lifting (alle Unterprogramme global)
- Registervergabe (alle Argumente in Registern)

Ziel: maschinen(nahes) Programm mit

- globalen (Register-)Variablen (keine lokalen)
- Sprüngen (kein return)
- automatischer Speicherbereinigung

## CPS-Transformation

### CPS-Transformation: Spezifikation

(als Schritt im Compiler)

- Eingabe: Ausdruck  $X$ , Ausgabe: Ausdruck  $Y$
- Semantik: Wert von  $X = \text{Wert von } Y(\lambda v.v)$
- Syntax:
  - $X \in \text{Exp}$  (fast) beliebig,
  - $Y \in \text{Exp/CPS}$  stark eingeschränkt:
    - \* keine geschachtelten Applikationen
    - \* Argumente von Applikationen und Operationen ( $+$ ,  $*$ ,  $>$ ) sind Variablen oder Literale

### CPS-Transformation: Zielsyntax

drei Teilmengen von `data Exp`:

```
Exp_CPS ==> App Identifier Exp_Value^*
  | If Exp_Value Exp_CPS Exp_CPS
  | Let Identifier Exp_Letable Exp_CPS
Exp_Value ==> Literal | Identifier
Exp_Letable ==> Literal
  | Abs Identifier Exp_CPS
  | Exp_Value Op Exp_Value
```

Übung 1: Übersetze von `Exp` nach `Exp_CPS`:

```
(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
```

Übung 2: wegen CPS brauchen wir tatsächlich:

```
\ k -> k ((0 - (b * b)) + (4 * (a * c)))
```

### Beispiel

Lösung 1:

```
(0 - (b * b)) + (4 * (a * c))
==>
let { t.3 = b * b } in
  let { t.2 = 0 - t.3 } in
    let { t.5 = a * c } in
      let { t.4 = 4 * t.5 } in
        let { t.1 = t.2 + t.4 } in
          t.1
```

Lösung 2:

```
\ k -> let ... in k t.1
```

### CPS-Transf. f. Abstraktion, Applikation

vgl. Sect. 6 in: Gordon Plotkin: *Call-by-name, call-by-value and the  $\lambda$ -calculus*, Th. Comp. Sci. 1(2) 1975, 125-159

[http://dx.doi.org/10.1016/0304-3975\(75\)90017-1](http://dx.doi.org/10.1016/0304-3975(75)90017-1),

<http://homepages.inf.ed.ac.uk/gdp/>

- $\text{CPS}(v) = \lambda k.kv$
- $\text{CPS}(FA) = \lambda k.(\text{CPS}(F)(\lambda f.(\text{CPS}(A)(\lambda a.fak))))$
- $\text{CPS}(\lambda x.B) = \lambda k.k(\lambda x. \text{CPS}(B))$

dabei sind  $k, f, a$  frische Namen.

Bsp.  $\text{CPS}(\lambda x.9) = \lambda k_2.k_2(\lambda x. \text{CPS}(9)) = \lambda k_2.k_2(\lambda x.k_1.k_19)$ ,

$\text{CPS}((\lambda x.9)8) =$

$\lambda k_4.(\lambda k_2.k_2(\lambda x.k_1.k_19))(\lambda f.((\lambda k_3.k_38)(\lambda a.fak_4)))$

Ü: Normalform von  $\text{CPS}((\lambda x.9)8)(\lambda z.z)$

### Realisierung der CPS-Transformation

- $\text{CPS}(X) = \text{CPS}_K(X, \lambda x.x)$  wobei  
 $\text{CPS}_K : \text{Exp} \rightarrow (\text{ExpValue} \rightarrow \text{ExpCPS}) \rightarrow \text{ExpCPS}$
- $\text{CPS}_K(X, k)$  erzeugt Ausdruck  

```
let { .. } in .. let { v = .. } in k v
```

geschachtelte `Let`, der (letzte) Name  $v$  bezeichnet den Wert von  $X$ , Continuation  $k$  wird auf  $v$  angewendet
- Beispiel:  $\text{CPS}_K(X + Y, k) =$   
 $\text{CPS}_K(X, \lambda a. \text{CPS}_K(Y, \lambda b. \text{let } \{v=a+b\} \text{ in } k(v)))$
- dabei werden frische Namen (hier:  $v$ ) benötigt, deswegen  
Rechnung in Zustandsmonade:  $\text{CPS}_K : \text{Exp} \rightarrow$   
 $(\text{ExpValue} \rightarrow \text{Fresh ExpCPS}) \rightarrow \text{Fresh ExpCPS}$

### Namen

- Bei der Übersetzung werden „frische“ Variablennamen benötigt (= die im Eingangsprogramm nicht vorkommen).
- ```
module Control.Monad.State where
data State s a = State ( s -> ( a, s ) )
get :: State s s ; put :: s -> State ()
evalState :: State s a -> s -> a

fresh :: State Int String
fresh = do k <- get ; put (k+1)
        return $ "f." ++ show k
type Fresh a = State Int a
```
- wegen Zähler  $k$  sind alle diese Namen paarweise verschieden, können wegen "." nicht im Quelltext vorkommen.

### Anwendung der Namens-Erzeugung

- ```
fresh_let :: ExpLetable
-> (ExpValue->Fresh ExpCPS) -> Fresh ExpCPS
fresh_let a k = do
  f <- fresh "l" ; b <- k ( Ref f )
  return $ Let f a b
```
- ```
cpsk (Plus x y) k =
cpsk x $ \ u -> cpsk y $ \ v ->
fresh_let (Plus u v) k
```

## Kompilation des If

- warum (wann) funktioniert das nicht?

```
cpsk (If b j n) k =
  cps b $ \ b' ->
  cps j $ \ j' -> cps n $ \ n' ->
  k (If b' j' n')
```

- es wird Code erzeugt, der beide Zweige auswertet, weil unser Let strikt ist.

wenn einer der Zweige eine Rekursion enthält, dann erzeugt das Nichttermination.

- richtig ist: `cps b $ \ b' ->`

```
If b' <$> cps j k <*> cps n k
```

## Kompilation des Let

- `cps (Let n a b) k =` -- FALSCH:  
`cps a $ \ a' -> cps b $ \ b' -> k (Let n a' b')`

Testfall `cps (let a=9 in a+2) return`

ergibt `let {1.0=a+2} in let {a=9} in 1.0`

- U: auch falsch: `cps b $ \ b' -> cps a $ \ a' -> ..`

- besser (semantisch korrekt, aber Ziel-Syntax falsch):

```
cps a $ \ a' -> do b' <- cps b k; return (Let n a' b')
```

- richtig (`a'` ist `ExpValue`, mglw. nicht `ExpLetable`)

```
cps a $ \ a' -> do b' <- cps b k; return $ subst n a' b'
```

## Umrechnung zw. Continuations (App)

- die Continuation (Funktion) im Compiler repräsentieren als Ausdruck (Abstraktion) der Zielsprache

- `type Cont = ExpValue -> Fresh ExpCPS`  
`cont2exp :: Cont -> Fresh ExpCPS`  
`cont2exp k = do`  
 `e <- fresh "e" ; out <- k (Ref e)`  
 `return $ MultiAbs [e] out`

- `cpsk (App f a) k =`  
 `cps f $ \ f' -> cps a $ \ a' ->`  
 `cont2exp k >>= \ x -> fresh_let x $ \ c ->`  
 `return $ MultiApp f' [ a', c ]`

## Umrechnung zw. Continuations (Abs)

- Continuation im Quelltext → Continuation im Compiler

```
type Cont = ExpValue -> Fresh ExpCPS
exp2cont :: Name -> Cont
exp2cont c = \ v -> return $ MultiApp (Ref c) [v]
```

- Anwendung bei Abstraktion

```
Abs x b -> \ k -> do
  c <- fresh "k"
  b' <- cps b $ exp2cont c
  fresh_let (MultiAbs [ x, c ] b') k
```

## Vergleich CPS-Interpreter/Transformator

Wiederholung CPS-Interpreter:

```
type Cont = Val -> Action Val
eval :: Env -> Exp -> Cont -> Action Val
eval env x = \ k -> case x of
  ConstInt i -> ...
  Plus a b -> ...
```

CPS-Transformator:

```
type Cont = ExpValue -> Fresh ExpCPS
cps :: Exp -> Cont -> Fresh ExpCPS
cps x = \ m -> case x of
  ConstInt i -> ...
  Plus a b -> ...
```

## Übung CPS-Transformation

- Transformationsregeln für Ref, App, Abs, Let nachvollziehen (im Vergleich zu CPS-Interpreter)
- Transformationsregeln für if/then/else, new/put/get hinzufügen
- anwenden auf eine rekursive Funktion (z. B. Fakultät), wobei Rekursion durch Zeiger auf Abstraktion realisiert wird

## Closure Conversion

### Motivation

(Literatur: DCPL 17.10) — Beispiel:

```
let { linear = \ a -> \ x -> a * x + 1
    ; f = linear 2 ; g = linear 3
    }
in f 4 * g 5
```

beachte nicht lokale Variablen: ( $\lambda x \rightarrow \dots a \dots$ )

- Semantik-Definition (Interpreter) benutzt Umgebung
- Transformation (closure conversion, environment conversion) (im Compiler) macht Umgebungen explizit.

## Spezifikation

closure conversion:

- Eingabe: Programm  $P$
- Ausgabe: äquivalentes Programm  $P'$ , bei dem alle Abstraktionen *geschlossen* sind
- zusätzlich:  $P$  in CPS  $\Rightarrow P'$  in CPS

geschlossen: alle Variablen sind lokal

Ansatz:

- Werte der benötigten nicht lokalen Variablen  $\Rightarrow$  zusätzliche(s) Argument(e) der Abstraktion
- auch Applikationen entsprechend ändern

## closure passing style

- Umgebung = Tupel der Werte der benötigten nicht lokalen Variablen

- Closure = Paar aus Code und Umgebung

realisiert als Tupel (Code,  $\underbrace{W_1, \dots, W_n}_{\text{Umgebung}}$ )

```
\ x -> a * x + 1
==>
\ clo x ->
  let { a = nth 1 clo } in a * x + 1
```

Closure-Konstruktion?

Komplette Übersetzung des Beispiels?

## Transformation

```
CLC[ \ i_1 .. i_n -> b ] =
  (tuple ( \ clo i_1 .. i_n ->
    let { v_1 = nth 1 clo ; .. }
    in CLC[b]
  ) v_1 .. )
```

wobei  $\{v_1, \dots\}$  = freie Variablen in  $(\lambda i_1 \dots i_n \rightarrow b)$

```
CLC[ (f a_1 .. a_n) ] =
  let { clo = CLC[f]
    ; code = nth 0 clo
  } in code clo CLC[a_1] .. CLC[a_n]
```

- für alle anderen Fälle: strukturelle Rekursion
- zur Erhaltung der CPS-Form: Spezialfall bei `let`

## Lifting

### Spezifikation

(lambda) lifting:

- Eingabe: Programm  $P$ , bei dem alle Abstraktionen geschlossen sind
- Ausgabe: äquivalentes Programm  $P'$ , bei dem alle Abstraktionen (geschlossen und) global sind

Motivation: in Maschinencode gibt es nur globale Sprungziele

(CPS-Transformation: Unterprogramme kehren nie zurück  $\Rightarrow$  globale Sprünge)

## Realisierung

nach closure conversion sind alle Abstraktionen geschlossen, diese müssen nur noch aufgesammelt und eindeutig benannt werden.

```
let { g1 = \ v1 .. vn -> b1
    ..
    ; gk = \ v1 .. vn -> bk
  } in b
```

dann in  $b_1, \dots, b_k, b$  keine Abstraktionen gestattet

- Zustandsmonade zur Namenserverzeugung ( $g_1, g_2, \dots$ )
- Ausgabemonade (`WriterT`) zum Aufsammeln
- $g_1, \dots, g_k$  dürften nun sogar rekursiv sein (sich gegenseitig aufrufen)

## Lambda-Lifting (Plan)

um ein Programm zu erhalten, bei dem alle Abstraktionen global sind:

- bisher: closure conversion + lifting: (verwendet Tupel)
- Alternative: lambda lifting (reiner  $\lambda$ -Kalkül, keine zusätzlichen Datenstrukturen)

## Lambda-Lifting (Realisierung)

- verwendet Kombinatoren (globale Funktionen)

$I = \lambda x.x, S = \lambda xyz.xz(yz), K = \lambda xy.x$

- und Transformationsregeln

$\text{lift}(FA) = \text{lift}(F) \text{lift}(A), \text{lift}(\lambda x.B) = \text{lift}_x(B);$

- Spezifikation:  $\text{lift}_x(B)x \rightarrow_{\beta}^* B$

- Implementierung:

falls  $x \notin \text{Free}(B)$ , dann  $\text{lift}_x(B) = KB;$

sonst  $\text{lift}_x(x) = I, \text{lift}_x(FA) = S \text{lift}_x(F) \text{lift}_x(A)$

Beispiel:  $\text{lift}(\lambda x.\lambda y.yx) = \text{lift}_x(\text{lift}_y(yx)) = \text{lift}_x(SI(Kx)) = S(K(SI))(S(KK)I)$

## Registervergabe

### Motivation

- (klassische) reale CPU/Rechner hat nur *globalen* Speicher (Register, Hauptspeicher)
- Argumentübergabe (Hauptprogramm → Unterprogramm) muß diesen Speicher benutzen (Rückgabe brauchen wir nicht wegen CPS)
- Zugriff auf Register schneller als auf Hauptspeicher ⇒ bevorzugt Register benutzen.

## Plan (I)

- Modell: Rechner mit beliebig vielen Registern ( $R_0, R_1, \dots$ )
- Befehle:
  - Literal laden (in Register)
  - Register laden (kopieren)
  - direkt springen (zu literaler Adresse)
  - indirekt springen (zu Adresse in Register)
- Unterprogramm-Argumente in Registern:
  - für Abstraktionen: ( $R_0, R_1, \dots, R_k$ ) (genau diese, genau dieser Reihe nach)
  - für primitive Operationen: beliebig
- Transformation: lokale Namen → Registernamen

## Plan (II)

- Modell: Rechner mit begrenzt vielen realen Registern, z. B. ( $R_0, \dots, R_7$ )
- falls diese nicht ausreichen: *register spilling* virtuelle Register in Hauptspeicher abbilden
- Hauptspeicher (viel) langsamer als Register: möglichst wenig HS-Operationen: geeignete Auswahl der Spill-Register nötig

## Registerbenutzung

- Allgemeine Form der Programme:

```
let { r1 = .. ; r2 = .. } in r4 ..
```
- für jeden Zeitpunkt ausrechnen: Menge der *freien* Register (= deren aktueller Wert nicht (mehr) benötigt wird)
- nächstes Zuweisungsziel ist niedrigstes freies Register (andere Varianten sind denkbar)
- vor jedem UP-Aufruf: *register shuffle* (damit die Argumente in  $R_0, \dots, R_k$  stehen)

## Compiler-Übungen

1. Testen Sie die richtige Kompilation von

```
let { d = \ f x -> f (f x) }
in d d d d (\ x -> x+1) 0
```

2. implementieren Sie fehlende Codegenerierung/Runtime für

```
let { p = new 42
    ; f = \ x -> if (x == 0) then 1
                else (x * (get p) (x-1))
    ; foo = put p f
} in f 5
```

3. ergänzen Sie das Programm, so daß 5! ausgerechnet wird

```
let { f = label x (x, 5, 1) }
in if ( 0 == nth 1 f )
    then nth 2 f
    else jump ...
        (..., ..., ...)
```

Kompilieren Sie das Programm. Dazu muß für `label`, `jump`, `tuple`, `nth` die CPS-Transformation implementiert werden.

4. Bei der CPS-Transformation von `If` wird die Continuation  $k$  kopiert:

```
If b' <$> cps j k <*> cps n k
```

Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß dadurch der Ausgabertext groß werden kann.

Geben Sie eine andere Übersetzung für `If` an, bei der  $k$  nur einmal angewendet wird. (Benutzen Sie `cont2exp`.)

Überprüfen Sie für das eben angegebene Beispiel.

5. Alle Tests bis hier kompilieren konstante Ausdrücke. Diese könnte man auch sofort auswerten.

Ändern Sie Compiler und Laufzeitsystem, so daß Funktionen kompiliert werden, die zur Laufzeit Argumente (Zahlen) von der Kommandozeile bekommen.

6. Register Allocator in GCC: siehe <https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gccint/RTL-passes.html>.

[org/onlinedocs/gccint/RTL-passes.html](https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gccint/RTL-passes.html).

Suchen Sie die entsprechende Beschreibung/Implementierung in `clang (llvm)`.

Vergleichen Sie an Beispielen die Anzahl der Register in dem von unserem Compiler erzeugten Code und dem daraus durch GCC (`clang`) erzeugten Assemblercode.

Wo findet die Register-Allokation für Java-Programme statt?

und wer Zeit hat ...

- Typprüfung vor Kompilation
- exakte Spezifikation und Beweis der CPS-Transformation
- Verbesserung der Registerzuweisung

- anderes Back-End (nicht C): Maschinencode für reale oder virtuelle Maschine, z.B. LLVM IR <http://llvm.org/docs/LangRef.html#introduction>, WASM <https://webassembly.org/>
- was fehlt, bis der Compiler seinen eigenen Quelltext übersetzen kann?

## Zusammenfassung

### Methoden

- Inferenzsysteme
- Lambda-Kalkül
- (algebraischen Datentypen, Pattern Matching, Funktionen höherer Ordnung)
- Monaden

### Semantik

- dynamische (Programmausführung)
  - Interpretation
    - \* funktional,
    - \* imperativ (Speicher)
    - \* Ablaufsteuerung (Continuations)
  - Transformation (Kompilation)
    - \* CPS transformation
    - \* closure passing, lifting, Registerzuweisung
- statische: Typisierung (Programmanalyse)
  - monomorph/polymorph
  - deklariert/rekonstruiert

### Monaden zur Programmstrukturierung

```
class Monad m where { return :: a -> m a ;
                    (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b }
```

Anwendungen:

- semantische Bereiche f. Interpreter,
  - Parser,
  - Unifikation
- Testfragen (für jede Monad-Instanz):
- Typ (z. B. Action)
  - anwendungsspezifische Elemente (z. B. new, put)
  - Implementierung der Schnittstelle (return, bind)

### Wozu braucht man den Compilerbau?

- jedes Programm verwendet Methoden des Compiler-(d.h. Übersetzer)baus  
(nach Definition übersetzt es Eingabe in Ausgabe)  
Gerhard Goos zugeschrieben, <https://dblp.uni-trier.de/pers/hd/g/Goos:Gerhard>
- G.Goos: *Issues in Compiling*, JUCS 2001, <http://dx.doi.org/10.3217/jucs-007-05-0410>
- Ask HN: *Are compiler engineers still in demand, and what do they work on?* 20. 1. 2020, <https://news.ycombinator.com/item?id=22096628>

### Prüfungsvorbereitung

Beispielklausur <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ws11/cb/klausur/>

- was ist eine Umgebung (Env), welche Operationen gehören dazu?
- was ist eine Speicher (Store), welche Operationen gehören dazu?
- Gemeinsamkeiten/Unterschiede zw. Env und Store?
- Für  $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ : zeichne den Syntaxbaum, bestimme die Menge der freien und die Menge der gebundenen Variablen. Markiere im Syntaxbaum alle Redexe. Gib die

Menge der direkten Nachfolger an (einen Beta-Schritt ausführen).

- Definiere Beta-Reduktion und Alpha-Konversion im Lambda-Kalkül. Wozu wird Alpha-Konversion benötigt? (Dafür Beispiel angeben.)
- Wie kann man Records (Paare) durch Funktionen simulieren? (Definiere Lambda-Ausdrücke für `pair`, `first`, `second`)
- welche semantischen Bereiche wurden in den Interpretern benutzt? (definieren Sie `Val`, `Action Val`, `CPS Val`)
- welches sind die jeweils hinzukommenden

Ausdrucksmöglichkeiten der Quellsprache ( $E_{Exp}$ )?

- wie lauten die Monad-Instanzen für `Action`, `CPS`, `Parser`, was bedeutet jeweils das `bind (>>=)`?
- warum benötigt man call-by-name für Abstraktionen über den Programmablauf (warum kann man `if` oder `while` nicht mit call-by-value implementieren)?
- wie kann man call-by-name simulieren in einer call-by-value-Sprache?
- wie kann man call-by-value simulieren in einer call-by-name-Sprache (Antwort: durch CPS-Transformation)

- Definiere Fakultät mittels Fixpunktoperator (Definiere das  $f$  in  $f_{ak} = \text{fix } f$ )
- Bezüglich welcher Halbordnung ist dieses  $f$  monoton? (Definiere die Ordnung, erläutere Monotonie an einem Beispiel.)
- Wie kann man Rekursion durch get/put simulieren? (Programmbeispiel ergänzen)
- Wie kann man Rekursion durch label/jump simulieren? (Programmbeispiel ergänzen)
- Für die Transformationen CPS, Closure Conv., Lifting, Registervergabe: welche Form haben jeweils Eingabe- und Ausgabeprogramm? Auf welchem Maschinenmodell

kann das Zielprogramm ausgeführt werden? (Welche Operationen muß das Laufzeitsystem bereitstellen?)

- Was sind die Bestandteile eines Inferenzsystems (Antwort: Grundbereich, Axiome, Regeln), wie kann man ein Axiom als Spezialfall einer Regel auffassen?
- wie lauten die Inferenzregeln für das Nachschlagen eines Namens in einer Umgebung?
- Inferenzregeln für Applikation, Abstraktion, Let, If/Then/Else im einfach getypten Kalkül
- Geben Sie ein Programm an, das sich nicht einfach (sondern nur polymorph) typisieren läßt. Geben Sie den polymorphen Typ an.

- Inferenz-Regeln für Typ-Applikation, Typ-Abstraktion im polymorphen Kalkül
- für Typ-Rekonstruktion im einfach getypten Kalkül: Welches ist der Grundbereich des Inferenzsystems?
- geben Sie die Inferenzregel für Typrekonstruktion bei If/Then/Else an
- Geben Sie eine Inferenzregel für Typrekonstruktion an, durch die neue Variablen eingeführt werden.
- Wann ist  $\sigma$  ein Unifikator von zwei Termen  $s, t$ ?
- Geben Sie zwei verschiedene Unifikatoren von  $f(a, X)$  und  $f(Y, Z)$  an. Einer davon soll streng allgemeiner als

der andere sein. Begründen Sie auch diese Beziehung.

- Bestimmen Sie einen Unifikator von  $f(X_n, f(X_{n-1}, \dots, f(X_0, a) \dots))$  und  $f(f(X_{n-1}, X_{n-1}), f(f(X_{n-2}, X_{n-2}), \dots, f(a, a) \dots))$ .