Aufgaben zu Reduktionen und zur Komplexität

Alle Großbuchstaben stehen für Teilmengen von $\mathbb{N}$. Komplemente von Mengen werden bezüglich $\mathbb{N}$ genommen: $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A$. Many–One–Reduktion heißt $\leq_{\mathrm{m}}$.
Wir definieren $A \equiv_{\mathrm{m}} B$ durch $A \leq_{\mathrm{m}} B \wedge B \leq_{\mathrm{m}} A$.
Die Menge der rekursiv aufzählbaren Teilmenen von $\mathbb{N}$ heißt RE,
die der rekursiv entscheidbaren Teilmengen von $\mathbb{N}$ heißt REC.
ϕ_x ist eine Hauptnumerierung. $W_x = \mathrm{domain}(\phi_x)$.

1.) Wenn $A \in \mathsf{RE}$ und $A \leq_{\mathrm{m}} \overline{A}$, dann $A \in \mathsf{REC}$.

2.) Für $A \in \mathsf{RE}$ und $B \in \mathsf{RE}$:
Wenn $A \cup B = \mathbb{N}$ und $A \cap B \neq \emptyset$, dann $A \leq_{\mathrm{m}} A \cap B$.

3.) Für Mengen A und B mit $\emptyset \neq A \neq \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq B \neq \mathbb{N}$ gilt:
Wenn $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ endlich ist, dann $A \equiv_{\mathrm{m}} B$.

Bei 4. und 5.: wählen Sie einige Teilaufgaben aus!

4.) Vergleichen Sie bezüglich $\leq_{\mathrm{m}}$:

- $\{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$
- $\{x \mid x \text{ ist Quadratzahl}\}$
- $\{x \mid x \equiv 1 \pmod 3\}$
- $\{x \mid x \in W_x\}$
- $\{x \mid W_x = \emptyset\}$
- $\{x \mid W_x \text{ ist endlich}\}$
- $\{x \mid W_x \text{ ist unendlich}\}$
- $\{x \mid W_x = \mathbb{N}\}$

Welche dieser Mengen liegen in P? In NP?

5.) (Bezeichnungen siehe Skript von diesem Jahr, Seite 29f, und Skript vom vorigen Jahr, `http://www.informatik.uni-leipzig.de/~joe/edu/ws98/Bkplx98.ps`, Seite 35ff)

Zeigen Sie, daß die dort angegebenen Mengen (Clique, Knapsack, Partition, …) wirklich in NP liegen.

Wichtig:
Finden Sie zu jeder dieser Mengen ein Beispiel und ein Nicht–Beispiel! (D. h. einen Graphen mit Hamiltonkreis und einen ohne, usw.)