Aufgabenblatt 6: Primitive Rekursion und μ-Rekursion

Bezeichnungen $S, \mathrm{Comp}, \mathrm{Rek}, \mu$ wie im Skript, Seite 14f.

Statt $I_{m,n}$ schreibe ich I_m^n. Statt der einstelligen Nullfunktion Z benutzen wir mehrere Nullfunktionen $Z^n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto 0$.

---

61) Welche Funktionen a, g, h sind im folgenden definiert? Die Leerstellen sind durch passende Operatoren (Comp oder Rek) zu füllen. Achten Sie dabei genau auf die Stelligkeit der Funktionen! Die Funktion a soll kommutativ sein.

$$
\begin{aligned}
a &= \boxed{}(I_1^1, \boxed{}(S, I_3^3)) \\
g &= \boxed{}(Z^0, \boxed{}(\boxed{}(\boxed{}(S, Z^0), Z^2), I_2^2)) \\
h &= \boxed{}(Z^0, \boxed{}(a, I_2^2, \boxed{}(g, I_1^2)))
\end{aligned}
$$

Beispiel: im Ausdruck $\boxed{}(S, Z^0)$ schließen Sie so: S ist einstellig, Z^0 ist nullstellig, also wäre $\mathrm{Rek}(S, Z^0)$ ein Typfehler, deswegen kann es höchstens $\mathrm{Comp}(S, Z^0)$ heißen.

Das ist in der Tat typkorrekt: in die einstellige Funktion S (Nachfolger) wird die nullstellige Funktion Z^0 (deren Ergebnis immer 0 ist) eingesetzt. Das Ergebnis $\mathrm{Comp}(S, Z^0)$ ist also eine nullstellige Funktion, deren Wert immer $S(0) = 1$ ist.

---

62 — Zusatz) Die Funktion

$$
\begin{aligned}
f(0, n) = f(m, 0) &= 1 \\
f(m+1, n+1) &= \text{if } f(m, n+1) = f(m+1, n) \text{ then } 0 \text{ else } 1
\end{aligned}
$$

ist primitiv rekursiv. Erzeugen Sie sie durch Operatoren aus den Anfangsfunktionen! (Sie dürfen dabei Addition, Subtraktion, Multiplikation, **div** und **mod** als vordefinierte Funktionen benutzen.)

---

63) Finden Sie einen Ausdruck mit nur einem μ, der zu

$$g = \mu(\mu f)$$

äquivalent ist. Hinweis: $g = \mu(\mathrm{Comp}(f, \ldots))$.

Betrachten Sie das Beispiel $f(x, y, z) = x \dot{-} y^2 \dot{-} z^2$.