Domino

Wir betrachten Parkettierungen eines beiderseitig unendlichen Streifens der Ebene, der b Einheitsquadrate breit ist.

Zur Verfügung steht eine endliche Menge M von Typen von Bausteinen der Größe 1×1. Jeder Typ ist gegeben durch ein Quadrupel von natürlichen Zahlen, wobei jede Zahl die Farbe einer Quadratkante kodiert.

Eine *Parkettierung* ist eine Zuordnung: Position des Bausteins $\to$ Typ (die Steine dürfen weder gedreht noch gespiegelt werden.) Eine Parkettierung heißt *zulässig*, wenn überall nur Kanten gleicher Farbe (Nummer) aneinanderstoßen. Die beiden Kanten des Streifens selbst sollen dabei zwei vorher festgelegte Farben besitzen.

Wir betrachten das Problem P:

> Eingabe: eine Streifenbreite $b > 0$, zwei Farben l und h für die Streifenkanten, und eine Menge M von Typen.
>
> Ausgabe: „Ja", gdw. es unter diesen Voraussetzungen eine zulässige Parkettierung für den gesamten Streifen gibt.

Finden Sie eine Eingabe mit $b \geq 2$ und $|M| \geq 3$, für die eine vollständige zulässige Parkettierung existiert, jedoch nicht für eine beliebige echte Teilmenge $N \subset M$ der Typen.

Zeigen Sie, daß P entscheidbar ist. Konstruieren Sie dazu aus der Eingabe eine geeignete reguläre Sprache L mit der Eigenschaft: L ist unendlich gdw. die geforderte Parkettierung existiert.

Wie läßt sich die Frage „ist L unendlich" entscheiden?

Betrachten Sie jetzt das Problem P', das aus P entsteht, wenn die Steine gedreht werden dürfen.

Zeigen Sie $P \leq P'$ und $P' \leq P$.

Zur Erinnerung: $P \leq P'$ heißt: Sie können einen Lösungsalgorithmus für P' benutzen, um P zu entscheiden. Sie müssen dazu aus einer Eingabe (b, l, h, M) für P eine passende Eingabe (b', l', h', M') für P' konstruieren.

Diagonalisierungen

Wir können in verschiedensten Funktionenklassen F *diagonalisieren*:

1. Es ist $f_0, f_1, f_2, \ldots$ eine Anordnung, in der alle Funktionen aus F wenigstens einmal vorkommen (das heiß: es $f.$ ist eine surjektive Abbildung: $\mathbb{N} \to F$.)
2. Die Funktion g ist definiert durch $g(x) = f_x(x) + 1$.
3. Diese Funktion g gehört auch zu F, und erscheint deswegen in der Liste $f_0, f_1, f_2, \ldots$, an einer Stelle k. Also: $\exists k : f_k = g$.
4. Daraus folgt ein Widerspruch zwischen $g(k) = f_k(k)$ und $g(k) = f_k(k) + 1$.

Zeigen Sie, wie dieser Widerspruch für folgende Funktionenklassen aufgelöst wird:

1. primitiv–rekursive Funktionen
2. allgemein–rekursive Funktionen
3. partiell–rekursive Funktionen
4. alle totalen Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Geben Sie dazu für jede Funktionenklasse an, welche der Voraussetzugen des abzuleitenden Widerspruchs *nicht* erfüllt ist. — Beispiel:

5. konstante Funktionen: die Diagonalfunktion g ist sicher *nicht* konstant, also geht Schritt 3 schief: g gehört gar nicht zu F, also gibt es so ein k nicht.