Aufgabenblatt 2

Polemik (J.W.) Um die verschiedenen Berechnungsmodelle einzuüben, kann man leicht tausende von Aufgaben stellen im Stil von „schreiben Sie ein Programm, das… ausrechnet“. Das ist für mich genauso sinnvoll wie „schreiben Sie mal ein paar mehrstellige Dezimalzahlen untereinander“, wenn es eigentlich darum geht, die schriftliche Multiplikation zu üben.

Der Programmierstil, den wir den Studenten im Studium beibringen wollen, ist: aus einer Spezifikation durch beweisbare Umformungen ein korrektes Programm ableiten. Deswegen legen wir von Anfang an *größten Wert* auf *Beweise von Programmeigenschaften*.

Auf diesem Aufgabenblatt gehen wir nur den allerersten Schritt: die Eigenschaften (hier: Schleifeninvarianten) sind bekannt, zu zeigen ist, daß sie erfüllt werden. Später müssen natürlich die passenden Invarianten selbst gefunden und formuliert werden.

21.) Es bezeichnet Bin die Menge der binären Wurzelbäume.

Jeder *innere* Knoten hat zwei Kinder, jeder *äußere* Knoten hat keine Kinder und heißt Blatt ($\spadesuit$).

Das folgende Berechnungssystem bestimmt eine Funktion $f : \mathsf{Bin} \to I\!N$:

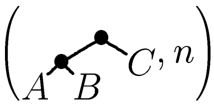
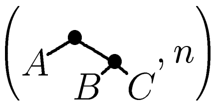
Die Zustandsmenge ist $\mathsf{Bin} \times I\!N$.

Die Eingabefunktion ist $\mathsf{In} : t \mapsto (t, 0)$.

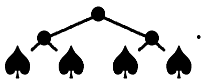
Die Ausgabefunktion ist $\mathsf{Out} : (t, n) \mapsto n$.

Die Stop-Funktion ist $\mathsf{Stop} : (t, n) \mapsto (\text{wenn } t = \spadesuit, \text{ dann } 1, \text{ sonst } 0)$.

Die Transitionsrelation ist die Vereinigung der Relationen

$\forall A, B, C \in \mathsf{Bin}, n \in I\!N :$  $\to$  (1)

$\forall C \in \mathsf{Bin}, n \in I\!N :$  $\to (C, n+1)$ (2)

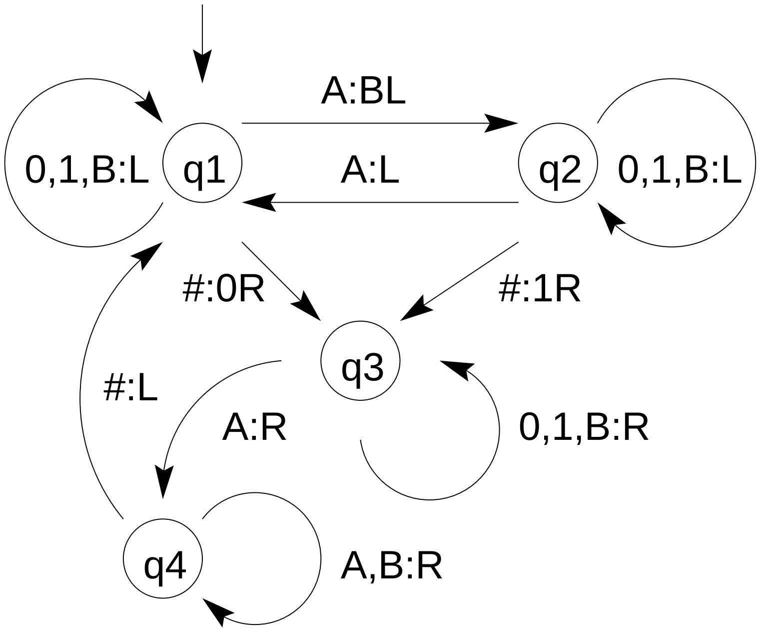
1. Zeigen Sie Rechnung und Resultat für die Eingabe .
2. Die Größe eines Baumes t ist $|t|$ = Anzahl der Blätter in t.

   Zeigen Sie: wenn $(t_1, n_1) \to^* (t_2, n_2)$, dann $|t_1| + n_1 = |t_2| + n_2$
3. Welche Funktion f berechnet das System demnach?
4. (Zusatz) Zeigen Sie, daß jede Berechnung stoppt.

   Benutzen Sie die Funktion $w(\spadesuit) = 1$, w  $= 2 \cdot w(A) + w(B)$

22) Die folgende Turingmaschine soll eine Unärzahl in ihre Binärdarstellung umwandeln, indem sie die Reste bei wiederholter Division durch 2 berechnet. Diese implementieren wir durch Streichen jeder zweiten Unärziffer.

Die Eingabe ist ein Wort der Form $AA\ldots A$, der Kopf steht anfangs im Zustand q_1 auf dem letzten Buchstaben (ganz rechts). Ein „gestrichenes“A wird zu B.



Die Bezeichnung $A : BL$ heißt: Wenn ein A gelesen wird, dann schreibe B und gehe nach links. Das # ist das Leerzeichen.

1. Zeigen Sie: zu jeder Zeit hat der Bandinhalt die Form vw mit $v \in (0 \cup 1)^*$ und $w \in (A \cup B)^*$.
2. Die Maschine soll anhalten, wenn der Bandinhalt $(0 \cup 1)^* B^*$ ist. Ergänzen Sie im Diagramm, wo der Übergang zum Stop-Zustand stattfindet.
3. Führen Sie vor, wie die Maschine die Binärdarstellung der Zahl Elf findet.
4. Zeigen Sie für die Bandinhalte vw (siehe oben) während einer Rechnung: immer, wenn die Maschine in Zustand q_3 oder q_4 ist, gilt

$$\mathsf{bin}(v) + 2^{|v|} \cdot \mathsf{Anzahl}_A(w) = |w|$$

   Dabei bezeichnet $\mathsf{bin}(v)$ den Wert der Zeichenkette v als Binärzahl und $\mathsf{Anzahl}_A(w)$ die Anzahl der A in w, sowie $|v|$ die Länge von v.
5. Wieso folgt daraus die Korrektheit des Programms?