Aufgabenblatt 1

11.) Finden Sie eine Gödelnumerierung von $I\!N^2$, d. h. eine berechenbare Isomorphie F von $I\!N$ auf $I\!N^2$, indem Sie Zahlenpaare so aufzählen:

$$\begin{array}{cccc} F(0)=(0,0) & F(1)=(1,0) & F(3)=(2,0) & F(6)=(3,0) \\ F(2)=(0,1) & F(4)=(1,1) & \dots & \dots \\ F(5)=(0,2) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Schreiben Sie $F(k) = (p(k), q(k))$ mit passenden Polynomen p, q.

12.) Für jedes Transitionssystem U über S mit den Regeln $v_i \to_U w_i$ für $1 \leq i \leq n$ und das *Umkehrsystem* U^{-1} mit den Regeln $w_i \to_{U^{-1}} v_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\forall x, y \in S : x \Rightarrow_U y \iff y \Rightarrow_{U^{-1}} x$$

Benutzen Sie Induktion nach der Ableitungslänge.

13.) Der *reversible Abschluß* $\mathsf{rev}(U)$ eines Transitionssystems $U = (S, \to)$ ist das System $(S, \to \cup \to^{-1})$. Zeigen Sie für deterministische U:

$$\forall y \in S : \text{wenn } \neg\exists z \in S : y \to z, \text{dann } \forall x \in S : \Big(x \Rightarrow_{\mathsf{rev}(U)} y \iff x \Rightarrow_U y\Big)$$

14.) Welche Funktion berechnet die Scott-Maschine $M = (I\!N^2, F, T, I, O)$

- mit den Operationen $F = \{f, g\}$,
  wobei $f : (x, y) \mapsto (x - 1, y)$, $g : (x, y) \mapsto (x, x + y)$,
- den Tests $T = \{t\}$ mit $t(x, y) = 1 \iff x > 0$,
- der Eingabefunktion $I : x \mapsto (x, 0)$,
- der Ausgabefunktion $O : (x, y) \mapsto y$

mit dem Programm

$$P = \{(0, t, 1, 5), (1, g, 2), (2, f, 3), (3, g, 0)\}?$$