Aufgaben zu rekursiv aufzählbaren Mengen

Bezeichnungen (wie in der Vorlesung): wenn eine *partiell–rekursive* Funktion *total* (d. h. überall definiert) ist, dann heißt sie *allgemein–rekursiv*, das wird auch abgekürzt mit *rekursiv.* Der Definitionsbereich einer partiellen Funktion f heißt $\mathsf{domain}\, f$, ihr Wertebereich heißt $\mathsf{range}\, f$.

9.2) Eine Menge M heißt *wiederholungsfrei* rekursiv aufzählbar,

wenn eine rekursive und injektive Funktion f existiert mit $M = \mathsf{range}\, f$.

Zeigen Sie: Für alle unendlichen Mengen M gilt:

M ist rekursiv aufzählbar $\iff$ M ist wiederholungsfrei rekursiv aufzählbar.

9.3) Zeigen Sie für alle rekursiven Funktionen f, g:

Wenn g injektiv ist und $\mathsf{range}\, g$ entscheidbar sowie $\forall x : f(x) \geq g(x)$,

dann ist $\mathsf{range}\, f$ entscheidbar.

9.4) Die Funktion f ist rekursiv ist, die Menge A entscheidbar, die Menge B rekursiv aufzählbar.

Was läßt sich über Entscheidbarkeit und rekursive Aufzählbarkeit der Mengen $f(A), f(B), f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ sagen?

9.13) Finden Sie eine unendliche Menge K,
die keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge hat.

Setzen Sie diese Lösungsidee fort:

Es gibt eine Anordnung $M_0, M_1, \ldots$ aller unendlichen rekursiv aufzählbaren Mengen. (Wir zählen zunächst *alle* Maschinen der Größe nach auf, und streichen dann die, die nur eine endliche Menge aufzählen. Das ist zwar nicht entscheidbar und auch nicht semi–entscheidbar, aber trotzdem wohldefiniert.) Diese Folge (M_i) ist sicher selbst unendlich.

Wir bilden eine monoton steigende Zahlenfolge (x_i) mit den Eigenschaften:
$\forall i : x_i \in M_i$ und $\forall i : x_i + 1 < x_{i+1}$. (**Warum reicht $\leq$ nicht?**)

Das geht so: x_0 ist irgendein Element aus M_0.
Für alle $i > 0$ wählen wir x_i als **. . . setzen Sie fort!**

Wir bilden die Menge $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$
und betrachten ihr Komplement $K = \mathbb{N} \setminus X$.
Dieses K hat die in der Aufgabe geforderten Eigenschaften: **. . . beweisen Sie!**