Kombinatorische Spieltheorie

Vorlesung

Wintersemester 2001/02

Johannes Waldmann, Institut für Informatik
Universität Leipzig, joe@informatik.uni-leipzig.de

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[BCG01] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy. *Winning Ways for your Mathematical Plays.* A K Peters, 2001. http://www.akpeters.com/book.asp?bID=136.

[Ber00] Elwyn Berlekamp. *The Dots and Boxes Game.* A K Peters, 2000. http://www.akpeters.com/book.asp?bID=111.

[Bew98] Jörg Bewersdorff. *Glück, Logik und Bluff.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1998. http://home.t-online.de/home/joerg.bewersdorff/index.htm.

[BN98] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[Bro00] Cameron Browne. *Hex Strategy.* A. K. Peters, 2000. http://www.akpeters.com/book.asp?bID=63.

[BW94] Elwyn Berlekamp and David Wolfe. *Mathematical Go: Chilling gets the last point.* A K Peters, 1994. http://www.akpeters.com/book.asp?bID=2.

[Con01] John H Conway. *On Numbers and Games.* A K Peters, 2001. http://www.akpeters.com/book.asp?bID=135.

[Guy98] Richard K. Guy. *Unsolved problems in combinatorial games*, pages 475–492. In Nowakowski [Now98], 1998.

[Knu74] Donald Erwin Knuth. *Surreal Numbers.* Addison Wesley, 1974. http://www-cs-staff.stanford.edu/~uno/sn.html.

[Now98] Richard J. Nowakowski, editor. *Games of No Chance.* Cambridge University Press, 1998. http://www.msri.org/publications/books/Book29/contents.html.

[SU93] Walter Stromquist and Daniel Ullman. Sequential compounds of combinatorial games. *Theoretical Computer Science*, 119:311–321, 1993.

Kapitel 1

Neutrale Spiele

1.1 Kombinatorische Spiele

11. Oktober

Definition 1. *Die kombinatorische Spieltheorie untersucht*

- *endliche*
- *Zweipersonen-*
- *Nullsummenspiele*
- *mit vollständiger Information.*

Aufgabe 2. *Nenne Beispiele für Spiele, die viele, aber* nicht alle *der genannten Eigenschaften haben!*

Für kombinatorische Spiele kann man wenigstens theoretisch jede Situation komplett analysieren, indem man den gesamten Spielbaum betrachtet.

Solche Bäume sind jedoch praktisch riesengroß, so daß man sich im Allgemeinen nur mit Heuristiken (für das Teilbaum-Abschneiden) behelfen kan.

Die kombinatorische Spieltheorie untersucht, wie man Spielbäume auf ganz exakte Weise verkürzt darstellen (normalisieren), und mit diesen Normalformen rechnen kann.

Wir sprechen in der ganzen Vorlesung nur über kombinatorische Spiele, und lassen deswegen dieses Adjektiv einfach weg.

1.2 Was ist ein Spiel?

Das Wortes *Spiel* benutzen wir alltagsspachlich in zwei verschiedenen Bedeutungen:

- Lasker beherrschte das Spiel Schach: Spiel ist eine Regelmenge.
- Wir beenden das Go-Spiel, das wir gestern abend begannen: eine konkrete Situation, die nach bestimmten Regeln erreicht wurde, und nach diesen fortzusetzen ist.

In der Theorie betrachten wir hingegen abstrakte Spielpositionen. Eine solche ist zum Beispiel: "es ist noch genau ein Zug ausführbar, und danach keiner mehr." Wir löschen also die Spielbaum-Beschriftungen.

1.3 Normale Spiele

Definition 3. *Ein kombinatorisches Spiel heißt* normal*, wenn genau der Spieler gewinnt, der den letzten Zug ausführt.*

Beispiel 4. *Schach ist (fast) normal: wer matt ist, hat eben keinen gültigen Zug mehr, und sein Gegner gewinnt.*

Beispiel 5. *Go ist nicht normal: beim üblichen Spielende gibt es noch viele gültige Züge, aber über den Gewinn wird durch Punktezählen entschieden.Man kann sich aber Zusatzregeln vorstellen (z. B. abwechselnd ins eigene Gebiet setzen), mit Hilfe derer das Spiel normal wird.*

Der Gegensatz zu normal heißt misere und wird erst im letzten Kapitel behandelt. Bis dahin sind alle Spiele normal, und wir lassen diese Kennzeichnung stillschweigend weg.

1.4 Neutrale Spiele

Definition 6. *Ein Spiel heißt* neutral*, wenn in jeder Situation für beide Spieler die gleichen Spielzüge gestattet sind.*

(Wir sprechen in diesem Kapitel nur von neutralen Spielen, also lassen wir diese Kennzeichnung stillschweigend weg.)

Nicht-Beispiel. Go, Schach usw. sind nicht neutral, weil der eine Spieler nur die schwarzen Figuren setzen/ziehen darf, der andere nur die weißen.

Beispiel 7. Sprouts *ist ein Spiel mit Punkten und Verbindungen (Bögen). Gegeben sind einige Punkte. Ein Spielzug ist: einen Bogen vom einem Punkt zu einem anderen (oder sich selbst) ziehen (ohne andere Bögen zu kreuzen, und nur, falls danach Anfangs- und Endpunkt höchstens dreibeinig sind) und dann auf dem neu gezeichneten Bogen einen neuen Punkt markieren. Verloren hat, wer keinen Bogen mehr ziehen kann (weil alle Punkte bereits zu hohen Grad haben oder voneinander getrennt sind).*

Beispiel 8. Wythoff *ist ein Spiel mit einer Dame auf einem viertel-unendlichem Schachbrett. Das Brett hat links und oben einen Rand. Die Dame darf nur nach Westen, Nordwesten oder Norden ziehen. (verloren hat, wer die Dame nicht mehr bewegen kann, weil sie auf dem obersten linken Feld steht).*

Beispiel 9. Subtraktionsspiele. *Gegeben sind eine Menge von Zahlen $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$ sowie ein Startwert n. Ein Spielzug ist die Wahl eines $d \in D$, das von n abgezogen wird: $n' := n - d$. Verloren hat, wer nicht mehr subtrahieren kann, weil eine negative Zahl entstehen würde.*

Beispiel 10. Haufen. *Gegeben ist ein Haufen von Objekten, die nicht individuell unterscheidbar sind. Ein Spielzug ist das Wegnehmen wenistgens einem (und höchstens allen) Steinen. Verloren hat auch hier, wer nicht mehr ziehen kann, weil er einen leeren Haufen vorfindet. Das Spiel ist natürlich trivial, wird aber noch benötigt.*

1.4.1 Subtraktionsspiele

Satz 11. *Für jedes Subtraktionsspiel gilt: die Gewinn/Verlust-Bewertung ist schließlich periodisch.*

(Beweis und Genaueres später).

Aufgabe 12. *Finde kleine Mengen D, deren Subtraktionsspiel eine große Periode hat.*

Beispiel 13. $D = \{22, 34, 53, 87\}$ *erzeugt Periode 114109 (bei Vorperiode 314).*

1.5 Abstrakte Spielpositionen

Eine abstrakte Spielposition ist allein dadurch gekennzeichnet, welche in einem Spielzug erreichbaren Nachfolger sie hat. Diese sind selbst abstrakte Spielpositionen. Die einfachste Position ist die *ohne* Nachfolger.

Definition 14. *Ein* neutrales Spiel *ist eine Menge von neutralen Spielen.*

Folgerung 15. *Das einfachste neutrale Spiel* ist *die leere Menge* $\emptyset$. *Weiterhin gibt es z. B. die neutralen Spiele* $\{\emptyset\}$ *sowie* $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Definition 16. *Wir bezeichnen einige neutrale Spiele durch Ausrücke* $*n$*:*

$$0 = \emptyset, *1 = \{0\}, *2 = \{0, *1\}, *3 = \{0, *1, *2\}, \dots$$

Das sind genau die verschiedenen Haufen-Größen. Beachte jedoch, daß es auch andere neutrale Spiele gibt, z. B. $\{*2\}$ oder $\{0, *1, *4\}$.

Definition 17. *Für ein Spiel G schreiben wir $W(G)$, falls G bei beiderseits optimalem Spiel vom Spieler, der am Zug ist, gewonnen werden kann, und $L(G)$ sonst.*

Weil es endliche Nullsummenspiele sind, gibt es keine andere Möglichkeit.

Aufgabe 18. *Finde L-Positionen für Wythoff sowie für das Subtraktionsspiel mit* $D = \{3, 7, 8\}$.

1.6 Disjunkte Summe von Spielen

Ein Ziel der Spieltheorie ist es, die Explosion der Suchbäume zu vermeiden, die beim Kombinieren von mehreren Teilspielen fast zwangsläufig entsteht. Wir zeichnen deswegen bestimmte einfachen Kombinationen aus.

Definition 19. *Die disjunkte Summme $G + H$ von zwei Spielen G und H ist das Spiel*

$$\{g + H : g \in G\} \cup \{G + h : h \in H\}.$$

Wir sehen hier eine typische spieltheoretische Definition durch Induktion über wohlfundierte Mengen (d. h. die Spiele sind alle endlich, deswegen funktioniert es).

Satz 20. *Die Operation + ist assoziativ und kommutativ und besitzt das neutrale Element $\emptyset$.*

Beweis: Übung.

Satz 21. *Für jedes Spiel G gilt $L(G + G)$.*

Bemerkung. Wir hätten ja am liebsten $G + G = \emptyset$, aber so einfach ist es nicht. Eine entsprechende Relation gilt nicht bezüglich "=", sondern nur bezüglich einer noch zu definierenden Äquivalenzrelation.

Proof. Zu zeigen ist, daß das Spiel $G + G$ für den anziehenden Spieler verloren ist. Wir geben eine Gewinnstrategie für den nachziehenden Spieler an. Diese besteht einfach darin, jeden Zug von $G + G$ auf $g + G$ (mit $g \in G$) durch den Zug zu $g + g$ zu beantworten. Nach Induktion (über die Länge der Spiele!) gilt bereits $L(g + g)$. □

1.7 Äquivalenzen von Spielen

Definition 22. *Wir sagen G und H sind* schwach äquivalent, *geschrieben $G \sim H$, wenn $L(G) \iff L(H)$.*

(also wenn beide gewonnen oder beide verloren sind). Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Das ist eine naheliegende Definition, und genauer wollen wir eigentlich gar nichts wissen.

Bemerkung. Direkt aus der Definition folgt $G \sim 0 \iff L(G)$.

Die Relation $\sim$ ist aber nicht stabil bzgl. disjunkter Summe:

Fakt 23. $*1 \sim *3$, *aber* $(*1 + *1) \not\sim (*1 + *3)$.

Proof. natürlich gilt $W(*1), W(*3), L(*1 + *1)$ aber $W(*1 + *3)$. □

Stabilität gilt nur eingeschränkt:

Lemma 24. *Wenn $G \sim 0$, dann $H \sim (G + H)$.*

Proof. Spielzüge in G werden bei Bedarf beantwortet. □

Beispiel 25. *Wegen $*2 + *2 \sim 0$ gilt $*3 \sim (*2 + *2 + *3)$.*

Wir verfeinern $\sim$ zu einer stabilen Relation:

Definition 26. *Wir sagen G und H sind (normal) äquivalent, und schreiben $G \approx H$, wenn $\forall K : (G + K) \sim (H + K)$.*

Satz 27. $(G \approx H) \iff L(G + H)$.

Proof. "$\Rightarrow$". Wir können in der Definition von $G \approx H$ insbesondere $K = G$ setzen, dann folgt $G + G \sim H + G$. Nun gilt aber $L(G + G)$, also auch $L(G + H)$.

"$\Leftarrow$". Betrachte das Spiel $X = G+H+H+K$. Wegen $L(G+H)$ nach Voraussetzung und Lemma gilt $X \sim H + K$. Andererseits ist $L(H + H)$ und somit $X \sim G+K$. □

Aufgabe 28. *Zeige $0 \sim G \iff 0 \approx G$.*

Interpretation: Die Relation $\sim$ war für die L-Spiele genau die richtige, aber die W-Spiele werden durch $\approx$ nochmals getrennt.

1.8 Satz von Sprague

18. Oktober

Definition 29. *Für jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ setzen wir*

$$\operatorname{mex} M = \min(\mathbb{N} \setminus M)$$

(mex = minimum excludant)

Lemma 30. *Für alle Zahlen $k \geq 0, n_1, \ldots, n_k \geq 0$ gilt: $\{*n_1, \ldots, *n_k\} \approx *m$, wobei $m = \operatorname{mex}\{n_1, \ldots, n_k\}$ ist.*

Proof. Wir zeigen $L(\{*n_1, \ldots, *n_k\} + *m)$.

Zieht der erste Spieler rechts zu $\{*n_1, \ldots, *n_k\} \approx *m'$ für ein $0 \leq m' < m$, dann zieht der zweite Spieler rechts zu $m' + m' \sim 0$. Das ist möglich, weil $m' \in \{n_1, \ldots, n_k\}$.

Zieht der erste Spieler links zu $*n_i + *m$, dann unterscheiden wir: falls $n_i < m$, dann zieht der zweite Spieler rechts zu $*n_i + *n_i$.

Falls jedoch $n_i > m$, dann antwortet der zweite Spieler *auch links* und zieht von $*n_i + *m$ zu $*m + *m$.

Beachte, daß der erste Spieler links *nicht* genau auf $*m$ ziehen kann. $\square$

Theorem 31. *Hauptsatz über neutrale Spiele (Sprague, 194?): Für jedes neutrale Spiel G existiert eine Zahl n, so daß $G \approx *n$.*

Proof. Wir führen Induktion über die Länge von G. Ist diese 0, so muß $G = \emptyset = 0$ sein.

Ansonsten (Induktionsschritt) ist $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$, und für die Spiele g_i ist die Aussage des Satzes wahr, also $g_i \approx *n_i$. Nach dem folgenden Lemma ist dann $G \approx *m$ für $m = \operatorname{mex}\{n_1, \ldots, n_k\}$. $\square$

Definition 32. *Die eindeutig bestimmte Zahl n mit $G \approx *n$ heißt Sprague-Grundy-Wert von G.*

Beispiel 33. *Wir bezeichnen mit* $\operatorname{Wyt}(x, y)$ *den Grundy-Wert der Wythoff-Position der Dame auf* (x, y).

Dann ist $\operatorname{Wyt}(0,0) = \operatorname{mex}\emptyset = 0, \operatorname{Wyt}(1,0) = \operatorname{mex}\{\operatorname{Wyt}(0,0)\} = \operatorname{mex}\{0\} = 1, \operatorname{Wyt}(1,1) = \operatorname{mex}\{\operatorname{Wyt}(0,0), \operatorname{Wyt}(1,0), \operatorname{Wyt}(0,1)\} = \operatorname{mex}\{0,1,0\} = 2, \ldots$

Aufgabe 34. *Finde Gesetzmäßigkeiten in der Grundy-Tabelle $G(x, y)$ für das folgende Spiel:*

Spielfigur ist ein Turm, der nur nach Norden oder Westen zieht, und Spielfeld ist ein viertel-unendliches Schachbrett mit einem *zusätzlichen* Feld bei $(0, -1)$. Dieses kann also nur durch einen Zug von $(0, y)$ aus betreten werden.

Aufgabe 35. *Betrachte auch dieses Spiel $F(x, y)$*

Spielfigur ist ein Turm, der nur nach Norden oder Westen zieht, und Spielfeld ist ein viertel-unendliches Schachbrett *ohne* das Feld $(0, 0)$.

Aufgabe 36. *Finde Zusammenhänge zwischen beiden Funktionen G und F.*

1.9 Disjunkte Summen von Grundy-Werten

25. Oktober

Lemma 37. *Keine Option x des Spiels X hat den gleichen Grundy-Wert wie X.*

Proof. folgt direkt aus $\mathrm{grundy}(X) = \mathrm{mex}\{\ldots, \mathrm{grundy}(x), \ldots\}$. $\square$

Lemma 38. *Für alle x und y sind die Grundy-Werte der Spiele*

$$*x + 0, *x + *1, \ldots, *x + *y$$

paarweise veschieden.

Proof. Für $i < j$ ist $*x + i$ eine Option von $*x + *j$. Die Behauptung folgt nach Lemma 37 $\square$

Lemma 39. *Für alle $n, k \geq 0$: Wenn $n < 2^k$, dann $*n + *2^k = *(n + 2^k)$.*

Für alle x, y, k: Wenn $x < 2^k$ und $y < 2^k$ und $*x + *y = *z$, dann $z < 2^k$.

Proof. Wir beweisen beide Behauptungen durch simultane Induktion nach k. Für $k = 0$ können wir die Aussagen direkt nachprüfen.

Wir betrachten $x, y \leq 2^{k+1}$ und $*x + *y = *z$.

- Falls $x, y < 2^k$, dann ist nach Induktion $z < 2^k < 2^{k+1}$.
- Falls $x < 2^k \leq y < 2^{k+1}$, dann setzen wir $y = 2^k + y'$ mit $0 \leq y' < 2^k$. Es gilt $*x + *y = *x + *(2^k + y') = *x + *2^k + *y'$ wegen Teil 1 von Lemma 39. Wir formen weiter um zu $*2^k + (*x + *y')$, und wegen Teil 2 des Lemmas ist $*x + *y' = *z'$ mit $z' < 2^k$, deswegen nach Teil 1 $*2^k + *z' = *(2^k + z')$, also $z = 2^k + z' < 2^{k+1}$.
- Der Fall $y < 2^k \leq x < 2^{k+1}$ ist symmetrisch dazu.
- Falls $2^k \leq x, y < 2^{k+1}$, dann setzen wir $x = 2^k + x', y = 2^k + y'$ sowie $*x' + *y' = *z'$. Es gilt $*x + *y = *(2^k + x') + *(2^k + y') = *2^k + *x' + *2^k + *y' = 0 + *x' + *y' = *z'$, und nach Induktion ist $z' < 2^k < 2^{k+1}$.

Betrachten wir nun Teil 1 der Behauptung. Die Optionen von $*n + *2^k$ sind

$$\underbrace{\{0 + *2^k, \ldots, *(n-1) + 2^k\}}_{A} \cup \underbrace{\{*n + 0, \ldots, *n + *(2^k - 1)\}}_{B}.$$

Nach Induktion ist $A = \{*2^k, \ldots, *(2^k + n - 1)\}$. Nach Teil 2 gilt für alle $b \in B$, daß $b < 2^k$. Nach Lemma 38 sind alle Elemente in B paarweise verschieden. Daraus folgt aber $B = \{0, *1, *(2^k - 1)\}$. Damit ist $*n + *2^k = A \cup B = \{0, *1, \ldots, *(2k + n - 1)\} = *(2^k + n)$. $\square$

Folgerung 40. *Falls $n = \sum_{k=0}^{l} n_k 2^k$ die Binärdarstellung von n ist, dann ist $*n = \sum_{k=0}^{l} *(n_k 2^k)$.*

Folgerung 41. *Falls $m = \sum_{k=0}^{l} m_k 2^k$ die Binärdarstellung von m ist, und $n = \sum_{k=0}^{l} n_k 2^k$ die Binärdarstellung von n, dann ist $*m + *n = * \sum_{k=0}^{l}((m_k \oplus n_k) 2^k)$.*

Hierbei ist $\oplus$ die binäre Addition modulo 2.

1.10 Nim-Spiele

1.10.1 Standard Nim

Wir haben $*n$ als Wert eines Haufens der Größe n definiert (von dem wir im nächsten Zug beliebig viele Steine wegnehmen dürfen).

Die disjunkte Summe solcher Haufen ist das Spiel *Nim*: eine Nim-Position ist eine Liste von Haufen $[h_1, \ldots, h_n]$ und ein Spielzug ist es, von irgendeinem Haufen irgendeine Anzahl Steine (aber wenigstens einen) zu entfernen.

Wir können den Wert einer Nim-Position ganz leicht berechnen: $\mathrm{grundy}[h_1, \ldots, h_n] = *h_1 + \ldots + *h_n$. und haben damit das Spiel vollständig gelöst.

1.10.2 Schokolade essen

Zwei Kinder haben eine große Tafel Schokolade (ein Rechteck mit $a \times b$ Kästchen) als Geschenk zu überbringen. Sie sollen eigentlich nichts davon essen, aber es wird schon keiner bemerken, wenn am Rand ein paar Zeilen und Spalten fehlen. Jedoch enthält ein Stück (mit Koordinaten (x, y)) eine Rosine, und das muß unbedingt übrigbleiben.

Die Kinder brechen nun abwechselnd Teile der Schokoladentafel ab und essen den Rest auf. Wer aber schließlich die Schokolade in der Hand hält und nichts mehr abbrechen kann (weil nur noch (x, y) übrig ist), hat verloren (und muß (x, y) als Geschenk überreichen).

Aufgabe 42. *Das ist tatsächlich ein klassisches Nim-Spiel auf vier Haufen. Wieso?*

1.10.3 Poker-Nim

Wir dürfen wie im Standard-Nim Haufen verkleinern (bewahren aber die dabei weggenommenen Steine auf), *oder* wir dürfen beliebig viele der angesammelten Steine auf einen Haufen drauflegen.

Das ist strenggenommen kein endliches Spiel, da beide Spieler wegnehmen-zurücklegen spielen können.

Tatsächlich gibt es jedoch einen Gewinnstrategie, bei der niemals etwas zurückgelegt wird, und deswegen sind vernünftige Spiele doch endlich.

Die Grundy-Werte sind nämlich bei Poker-Nim ganz genau dieselben wie bei Standard-Nim, und die Gewinnstrategie geht so: beantworte einen Wegnahme-Zug so wie im Standard-Nim. Wenn der Gegner jedoch Steine auf einen Haufen zurücklegt, dann nimm genau dieses im nächsten Zug wieder weg.

1.11 Coin Sliding Games

Man kann einen Haufen von Spielsteinen auch einfach durch einen einzigen Spielstein (Münze) charakterisieren, der auf einem Lineal liegt. Der Abstand vom Ursprung zeigt die Haufengröße an. (So spart man Steine.)

Braucht man mehrere Haufen, legt man etweder mehrere Zeilen untereinander (Northcotts Spiel), oder alle Münzen leben auf einer einzigen Zeile.

Beim Standard-Nim dürfen sich die Münzen beliebig in Richtung Null bewegen, insbesondere dürfen sie auch übereinander liegen und überholen. Durch Einschränkungen dieser Freiheiten kommen wir zu weiteren interessanten Spielen.

1.11.1 Northcotts Spiel

Ein Schachbrett, und acht weiße und acht schwarze Steine, in jeder Zeile je einer. Die Steine können in ihrer Zeile beliebig bewegt werden, dürfen aber nicht den anderen überspringen. Schluß ist, wenn alle Steine einer Farbe am Rand eingeschlossen sind.

Das ist wieder kein endliches Spiel, es gibt jedoch eine endliche Gewinnstrategie. Das Spiel ist äquivalent zu Poker-Nim mit acht Haufen.

1.11.2 Keine Türme, kein Überholen

Wir verbieten, daß mehrere Münzen auf einem Feld liegen, sowie daß sich Münzen überholen.

Die (einzige) Endposition ist also die, bei der alle n Münzen auf def Positionen $1, \ldots, n$ stehen (und sich deswegen keine mehr bewegen kann).

Aufgabe 43. *Wie berechnet man den Grundy-Wert einer Situation dieses Spiels?*

1.11.3 Welters Spiel

Weiterhin ist verboten, daß mehrere Münzen auf einem Feld stehen. Überholen ist gestattet. (Es gibt die gleiche Endposition wie im vorigen Spiel.)

Aufgabe 44. *Wie berechnet man den Grundy-Wert einer Situation dieses Spiels?*

Bemerkung 45. *Eine der beiden Aufgaben ist schwer, bei der anderen kommen wir durch eine Transformation direkt zu Poker-Nim.*

1.12 Take-and-Break

1.12.1 Lasker-Nim

Hierbei dürfen wir entweder einen Standard-Nim-Zug ausführen *oder* einen beliebigen Haufen in zwei *nichtleere* Haufen teilen.

Offenbar hängt der Spielwert wieder nur von den Werten der einzelnen Haufen ab. Wir benötigen eine Funktion f, die der Haufengröße n ihren Grundy-Wert im Lasker-Nim-Spiel zurodnet. Die Folge dieser Funktionswerte $(f(0), f(1), \ldots)$ nennt man Grundy-Folge des Spiels.

Aufgabe 46. *Berechne die ersten Elemente der Grundy-Folge von Lasker-Nim, erkenne darin eine Regelmäßigkeit und beweise diese.*

1.12.2 Grundy-Nim

Diesmal gibt es gar keine Standard-Nim-Züge mehr. Wir dürfen *nur noch* Haufen teilen, und zwar in zwei *verschieden* große.

Aufgabe 47. *Berechne die ersten Elemente der Grundy-Folge von Grundy-Nim, erkenne darin eine Regelmäßigkeit und beweise diese.*

Bemerkung 48. *Eine der beiden Aufgaben ist schwer.*

1.12.3 Kayles

(Kegeln): Aufgestellt ist eine Reihe von n Kegeln, ein Spielzug ist das Umwerfen von einem, oder genau zwei direkt nebeneinander stehenden Kegeln.

Aufgabe 49. *Berechne die ersten Elemente der Grundy-Folge von Kayles, erkenne darin eine Regelmäßigkeit und beweise diese.*

1.12.4 Officers

(Soldaten und Offiziere): gegeben sind einige Punkte (Soldaten). In einem Spielzug befördert man einen Soldaten zum Offizier (indem man den Punkt ankreuzt) und weist danach diesem Offizier wenigstens einen Untergebenen zu (indem man einen Kreis um den neuen Offizier und wenigstens noch einen Soldaten zieht). Die Kreise dürfen sich nicht schneiden.

Die gemoetrische Verkleidung kann man schnell entfernen, wenn man sieht, daß durch die Kreise die Soldaten in *innere* und *äußere* geteilt werden. Damit ist Officers tatsächlich ein Take-and-break-game.

Aufgabe 50. *Berechne die ersten Elemente der Grundy-Folge von Officers, erkenne darin eine Regelmäßigkeit und beweise diese.*

Bemerkung 51. *Wieder ist genau eine der letzten beiden Aufgaben sehr schwer.*

Aufgabe 52. *Wie kann man Spielsituationen in Sprouts und Bruxelles Sprouts kompakt darstellen? Dort werden auch Linien gezogen, aber nicht sofort geschlossen.*

1.13 Die Grundyfolge von Lasker-Nim

Autor dieses Abschnitts: Mirko Rahn mai99dla@studserv.uni-leipzig.de

1.13.1 Vorab

Lasker-Nim wird mit einem Haufen gespielt, der entweder wie im Standard-Nim verkleinert oder in zwei nichtleere Haufen geteilt werden darf.

Notation: $\mathrm{Ls}(n)$ ist das Lasker-Nim mit einem Haufen der Grösse n, $g(n)$ dessen Grundywert und $\oplus : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die Nim-Addition aka das XOR.

Es gilt

$$\mathrm{Ls}(n) = \{\mathrm{Ls}(0), \ldots, \mathrm{Ls}(n-1)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{\mathrm{Ls}(n-i) + \mathrm{Ls}(i)\}$$

und damit

$$g(n) = \operatorname{mex}\left(\{g(0), \ldots, g(n-1)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{g(n-i) \oplus g(i)\}\right).$$

Lemma 1: $\forall a, b \in \mathbb{N} : (a \oplus b \leq a + b)$.

Beweis: $a \oplus b$ ist niemals grösser als $a + b$, da XOR eine Addition *ohne* Übertrag ist. □

Lemma 2: $\forall a, b \in \mathbb{N} : (a \oplus b \neq a + b - 1)$.

Beweis: Sind a und b beide (un)gerade, dann ist $a + b - 1$ ungerade und $a \oplus b$ gerade, sind a und b gerade und ungerade (unterschiedlich), dann ist $a + b - 1$ gerade und $a \oplus b$ ungerade. □

Lemma 3: $\forall a, b \in \mathbb{N} : ((a \equiv b \bmod 4) \to (a \oplus b \equiv 0 \bmod 4))$.

Beweis: Wenn $a \equiv b \bmod 4$, dann stimmen a und b in den letzten beiden Bits überein, also endet $a \oplus b$ mit zwei Bits 0, also gilt $a \oplus b \equiv 0 \bmod 4$. □

Lemma 4: $\forall a, b \in \mathbb{N} : (((a \equiv 1 \bmod 4) \wedge (b \equiv 0 \bmod 4)) \to (a \oplus b \equiv 1 \bmod 4))$.

Beweis: a endet auf die Bits 01 und b auf die Bits 00 also endet $a \oplus b$ auf die Bits 01. □

1.13.2 Behauptung

Es gilt $g(0) = 0$ und $\forall n > 0$:

i	$4n-3$	$4n-2$	$4n-1$	$4n$
$g(i)$	$4n-3$	$4n-2$	$4n$	$4n-1$

1.13.3 Beweis

Mittels vollständiger Induktion, der Anfang kann für $n = 1$ mit `map g [0..4]` leicht nachgerechnet werden, es ergibt sich `[0,1,2,4,3]`. Bleibt also im Schritt für $n = k + 1$ zu zeigen, dass `map g [4k+1..4k+4]` zu `[4k+1,4k+2,4k+4,4k+3]` reduziert wird. Also evaluiere ich diese Ausdrücke:

$g(4k + 1)$

Es gilt

$$g(4k+1) = \operatorname{mex}\left(\underbrace{\{g(0),\ldots,g(4k)\}}_{=T} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{4k}\{g(4k+1-i)\oplus g(i)\}}_{=B}\right)$$

Nach Induktion gilt $T = \{0, \ldots, 4k\}$, also gilt $g(4k + 1) \geq 4k + 1$. Zur Berechnung der Werte in B führe ich eine vollständige Fallunterscheidung bezüglich des Restes bei Division von i durch 4 durch:

- $i = 4l$: Dann ist $g(4(k-l)+1) \oplus g(4l) = (4(k-l)+1) \oplus (4l-1)$ nach Induktion und $(4(k-l)+1) \oplus (4l-1) \leq 4k$ nach Lemma 1, da $4(k-l)+1+4l-1 = 4k$.

  Alle weiteren Unterfälle laufen nach dem gleichen Argumentationsschema, ich schreibe ab sofort verkürzt:

  $\Rightarrow g(4(k-l)+1) \oplus g(4l) = (4(k-l)+1) \oplus (4l-1) \leq 4k$ (L1)

- $i = 4l-1$: $\Rightarrow g(4(k-l)+2) \oplus g(4l-1) = (4(k-l)+2) \oplus (4l) \neq 4k+1$ (L2)

- $i = 4l-2$: $\Rightarrow g(4(k-l)+3) \oplus g(4l-2) = (4(k-l)+4) \oplus (4l-2) \neq 4k+1$ (L2)

- $i = 4l-3$: $\Rightarrow g(4(k-l)+4) \oplus g(4l-3) = (4(k-l)+3) \oplus (4l-3) \leq 4k$ (L1)

Insgesamt ergibt sich $B \cap \{4k+1\} = \emptyset$, also gilt $g(4k+1) = 4k+1$.

$g(4k+2)$

Es gilt

$$g(4k+2) = \operatorname{mex}\left(\underbrace{\{g(0),\ldots,g(4k+1)\}}_{=T} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{4k+1} \{g(4k+2-i) \oplus g(i)\}}_{=B}\right)$$

Nach Induktion und mit 1.13.3 gilt $T = \{0,\ldots,4k+1\}$, also gilt $g(4k+2) \geq 4k+2$. Zur Berechnung der Werte in B:

- $i = 4l$: $\Rightarrow g(4(k-l)+2) \oplus g(4l) = (4(k-l)+2) \oplus (4l-1) \leq 4k+1$ (L1)
- $i = 4l-1$: $\Rightarrow g(4(k-l)+3) \oplus g(4l-1) = (4(k-l)+4) \oplus (4l) \neq 4k+2$ (L3)
- $i = 4l-2$: $\Rightarrow g(4(k-l)+4) \oplus g(4l-2) = (4(k-l)+3) \oplus (4l-2) \leq 4k+1$ (L1)
- $i = 4l-3$: $\Rightarrow g(4(k-l)+5) \oplus g(4l-3) = (4(k-l)+5) \oplus (4l-3) \neq 4k+2$ (L3)

Insgesamt ergibt sich $B \cap \{4k+2\} = \emptyset$, also gilt $g(4k+2) = 4k+2$.

$g(4k+3)$

Es gilt

$$g(4k+3) = \operatorname{mex}\left(\underbrace{\{g(0),\ldots,g(4k+2)\}}_{=T} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{4k+2} \{g(4k+3-i) \oplus g(i)\}}_{=B}\right)$$

Nach Induktion und mit 1.13.3 und 1.13.3 gilt $T = \{0,\ldots,4k+2\}$, also gilt $g(4k+3) \geq 4k+3$. Zur Berechnung der Werte in B:

- $i = 4l$: $\Rightarrow g(4(k-l)+3) \oplus g(4l) = (4(k-l)+4) \oplus (4l-1) \leq 4k+3$ (L1)
- $i = 4l-1$: $\Rightarrow g(4(k-l)+4) \oplus g(4l-1) = (4(k-l)+3) \oplus (4l) \leq 4k+3$ (L1)
- $i = 4l-2$: $\Rightarrow g(4(k-l)+5) \oplus g(4l-2) = (4(k-l)+5) \oplus (4l-2) \leq 4k+3$ (L1)
- $i = 4l-3$: $\Rightarrow g(4(k-l)+6) \oplus g(4l-3) = (4(k-l)+6) \oplus (4l-3) \leq 4k+3$ (L1)

Ausserdem gilt $g(4k+2) \oplus g(1) = (4k+2) \oplus (1) = 4k+3$. Insgesamt ergibt sich $B \cap \{4k+3\} \neq \emptyset$ und $B \cap \{4k+4\} = \emptyset$, also gilt $g(4k+3) = 4k+4$.

$g(4k+4)$

Es gilt

$$g(4k+4) = \operatorname{mex}\left(\underbrace{\{g(0),\dots,g(4k+3)\}}_{=T} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{4k+3}\{g(4k+4-i)\oplus g(i)\}}_{=B}\right)$$

Nach Induktion und mit 1.13.3, 1.13.3 und 1.13.3 gilt $T = \{0,\dots,4k+2\} \cup \{4k+4\}$, also gilt $g(4k+4) = 4k+3 \vee g(4k+4) > 4k+4$. Zur Berechnung der Werte in B:

- $i = 4l$: $\Rightarrow g(4(k-l)+4) \oplus g(4l) = (4(k-l)+3) \oplus (4l-1) \leq 4k+2$ (L1)
- $i = 4l-1$: $\Rightarrow g(4(k-l)+5) \oplus g(4l-1) = (4(k-l)+5) \oplus (4l) \neq 4k+3$ (L4)
- $i = 4l-2$: $\Rightarrow g(4(k-l)+6) \oplus g(4l-2) = (4(k-l)+6) \oplus (4l-2) \neq 4k+3$ (L2)
- $i = 4l-3$: $\Rightarrow g(4(k-l)+7) \oplus g(4l-3) = (4(k-l)+8) \oplus (4l-3) \neq 4k+3$ (L4)

Insgesamt ergibt sich $B \cap \{4k+3\} = \emptyset$, also gilt $g(4k+4) = 4k+3$.

Zusammengefasst lauten die berechneten Werte:

i	$4n+1$	$4n+2$	$4n+3$	$4n+4$
$g(i)$	$4n+1$	$4n+2$	$4n+4$	$4n+3$

Das ist gerade die Behauptung. □

1.14 Oktale Spiele

1. November

Für eine ganze Klasse von Take-and-Break-Spielen gibt es eine kompakte Notation. Dabei wird die Spielregel (ein Schema für die erlaubten Spielzüge) als Folge von Zahlen kodiert. Für eine interessante Teilklasse davon benutzt man insbesondere Oktalzahlen.

Definition 53. *Wir betrachten Spiele auf Haufen, von denen wir Steine wegnehmen, und die wir in kleinere Haufen teilen dürfen. Im Spiel mit der Kodierung*

$$0 \cdot d_1 d_2 \ldots, \quad \textit{wobei} \quad d_i = \sum_k d_{ik} 2^k \quad \textit{mit} \quad d_{ik} \in \{0, 1\}$$

sind diese Spielzüge erlaubt: Falls $d_{ik} = 1$, dann darf man von einem Haufen i Steine entfernen und *(sofort danach) diesen verkleinerten Haufen beliebig in k nichtleere Haufen teilen.*

Beispiel 54. $0 \cdot 6$ *ist Officers. Wir haben $d_1 = 6 = 2^2 + 2^1$. Wir müssen also einen Stein wegnehmen, und danach den Haufen in 2 oder 1 Teile zerlegen, aber nicht in 0. Von einem Haufen der Größe 1 dürfen wir also nichts wegnehmen, weil der danach nicht mehr zerlegbar ist (sondern leer).*

Aufgabe 55. *Welchen Code hat Kayles?*

Ein Spiel ist dann oktal, wenn alle Codeziffern $0 \leq d_i \leq 7$ sind (also binär nur dreistellig).

Mit anderen Worten, dort kommt höchstens 2^2 vor, wir dürfen also den Haufen höchstens in zwei Teile zerlegen.

(Die nächste Klasse sind hexadezimale Spiele (bis zu drei Teile), usw.)

Satz 56. *Alle Subtraktionsspiele sind oktal.*

Proof. Wir dürfen den Haufen verkleinern, aber nicht teilen. Beim Verkleinern kann er auch ganz verschwinden. Die Codeziffern sind deswegen $d_i = 3 = 2^1 + 2^0$ für erlaubte Differenzen i, und 0 sonst. □

1.15 Hauptvermutung über oktale Spiele

Vermutung 57. *Für jedes endliche oktale Spiel*

$$0 \cdot d_1 \dots d_n$$

ist die Grundy-Folge beschränkt und schließlich periodisch.

Das ist die wichtigste offene Frage der Theorie neutraler normaler Spiele. Man kennt bis heute viele positive Beispiele (Kayles, $0 \cdot 77$, siehe frühere Übungsaufgabe), unter anderem alle Subtraktionsspiele (warum?), aber im Allgemeinen weder Beweis noch Gegenbeispiel. Es gibt einige oktale Spiele, bei deren Grundy-Folge man trotz größter Mühe und extensivster Rechungen noch keine Periode gefunden hat, ja noch nicht mal eine Schranke (Officers, $0 \cdot 6$)

In der Formulierung des Satzes bedeutet "endlich", daß das Codewort $0 \cdot d_1 \dots d_n$ endliche Länge besitzt. Es gibt auch sinnvolle Take-und-Break-Spiele, die man durch ein unendliches (oktales) Codewort beschreiben kann.

Beispiel 58. *Nim ist* $0 \cdot 333333 \dots$.

Aufgabe 59. *Welches Codewort paßt zu Lasker-Nim?*

Aufgabe 60. *Warum paßt kein Codewort zu Grundy-Nim?*

Auch für Grundy-Nim ist bis heute nicht bekannt, ob die Grundy-Werte beschränkt oder sogar schließlich periodisch sind.

Bei Nim, Lasker-Nim und einigen hexadezimalen Spielen stellt man arithmetische Periodizität fest.

Definition 61. *Eine Folge ist schließlich arithmetisch periodisch, wenn sie geschrieben werden kann als eine Folge von additiv verschobenen Blöcken*

$$(\dots, d_1 + b, \dots, d_n + b, d_1 + 2b, \dots, d_n + 2b, d_1 + 3b, \dots)$$

Aufgabe 62. *Überprüfe das für einige hexadezimale Spiele.*

1.16 Seltene und häufige Grundy-Werte

Dieser Abschnitt erläutert eine Eigenschaft von Take-und-Break-Spielen, die man ausnutzen kann, um Grundy-Werte schnell zu berechnen.

Wir fixieren ein Take-und-break-Spiel (z. B. Officers oder Grundy-Nim) und dessen Grundy-Folge $G = (g_0 = \mathrm{grundy}(0), g_1 = \mathrm{grundy}(1), \ldots)$

Definition 63. *Ein Grundy-Wert g_i heißt* selten, *wenn er nur endlich oft in G vorkommt. Alle anderen g_i heißen häufig. Die Menge der seltenen Grundy-Werte von G heißt $S(G)$, die Menge der häufigen Grundy-Werte heißt $H(G)$.*

Beachte, daß das normalerweise keine Partition von $\mathbb{N}$ ist, weil es noch Zahlen gibt, die überhaupt nicht in G vorkommen.

Aufgabe 64. *Welches sind seltene Werte für Kayles? Für Officers? Für Grundy-Nim?*

Obwohl wir das nur experimentell bestimmen können, fällt auf, daß seltene Werte durch Bitmuster bestimmt sind, und diese bei Nim-Addition erhalten bleiben: oft ist die Nim-Summe zweier seltener Zahlen wieder selten.

Für Grundy-Nim haben die seltenen Werte in Binärdarstellung die Eigenschaft, daß nach Löschen der letzten Ziffer eine gerade Anzahl von Einsen verbleibt.

Definition 65. *Eine Partition von $\mathbb{N}$ in zwei disjunkte Mengen A_0 und A_1 heißt* stabil *(bzgl. $\oplus$), wenn die Abbildung $h : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, mit $n \in A_{h(n)}$ ein Morphismus ist:*

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y).$$

Folgerung 66. *Dann gilt $A_0 \oplus A_0 = A_0 = A_1 \oplus A_1, A_0 \oplus A_1 = A_1 = A_1 \oplus A_0$.*

Satz 67. *Falls für die Grundy-Folge G eines endlichen oktalen Spiels gilt:*

- *$S(G)$ ist endlich*
- *es existiert eine stabile Partition (A, B) von $\mathbb{N}$ mit $S(G) \subseteq A$ und $H(G) \subseteq B$*

dann ist G beschränkt und schließlich periodisch.

Proof. Der Code des Spiels ist $0 \cdot d_1 \dots d_k$.

Wir bezeichnen $I = \{n : \text{grundy}(n) \in S(G)\}$. Nach Voraussetzung ist diese Menge endlich.

Betrachte grundy(n) für $n > \max I$, also genügend nach dem letzten Vorkommen eines seltenen Grundy-Wertes.

Dann ist g_n ein mex über eine Menge von (höchstens k) Werten g_x für $n-k \leq x < n$ sowie von Nim-Summen von Grundy-Werten $g_x \oplus g_y$ mit $n - k \leq x + y < n$.

Alle diese Zahlen M sind in A bzw. B (selten oder häufig).

grundy$(n) = \text{mex}\, M$ kann nicht $\in A$ sein, da nach Voraussetzung grundy$(n) \in B$, nämlich häufig, ist. Es gilt deswegen $\text{mex}\, M = \text{mex}(A \cup (M \cap B))$. Wir dürfen also annehmen, daß alle "benötigten" Werte aus A auch wirklich vorhanden sind.

Die Werte in $M \cup B$ sind jedoch einerseits die (höchstens k Stück) Werte $\{\text{grundy}(x) : n - k \leq xy < n\}$ sowie andererseits die (höchstens $|I|$ Stück) Werte $\{\text{grundy}(x) \oplus \text{grundy}(y) : n - k \leq x + y < n, x \in I\}$.

Insgesamt ist grundy(n) ein mex über eine Menge von höchstens $|I| + k + |I|$ Elementen. Damit gilt auch grundy$(n) \leq 2|I| + k =: N$. Die Grundy-Folge ist also ab dort beschränkt.

grundy(n) hängt nur von den $|I| + k =: K$ vielen Werten $\{\text{grundy}(n - i - x) : x \in I, 0 < i \leq k\}$ ab. Diese können aber insgesamt nur N^K viele verschiedene Werte annehmen, so daß sich nach spätestens soviel Werten eine Konfiguration wiederholt. Die Grundy-Folge ist damit schließlich periodisch. □

Diesen Beweis kann man ausnutzen, um schnell g_n zu bestimmen, wenn man eine Vermutung über die seltene Menge und die zugehörige Partition (A, B) eines Spiels hat.

Da man nicht weiß, ob man sich schon jenseits von $\max I$ befindet, kann man nicht sicher sein, daß das mex über die oben erwähnten $|I| + k$ Elemente ausreicht. Man muß deswegen zusätzlich die Summen vom Typ $B \oplus B$ solange aufzählen, bis man die Lücken vor dem oben konstruierten mex gefüllt hat. Dies wird normalerweise recht schnell der Fall sein.

Geschieht das jedoch nicht, hat man zwar Rechenzeit verbraucht (genausoviel wie bei der naiven Methode), aber schließlich ein bisher noch nicht bekanntes Element von I gefunden (das mex ist ja dann selten) und bekommt damit den Rechenaufwand vergütet.

Für Grundy-Nim hat Dan Hoey nach diesen Methoden alle Werte bis 10^{10} berechnet. [BCG01] Der größte dabei gefundene Grundy-Wert war 292, und der letzte seltene $g(48.399.022) = 259$.

Aufgabe 68. *Löse einige der bis heute ungeklärten oktalen Spiele [Guy98] :*

$$0 \cdot 6,\ 0 \cdot 06,\ 0 \cdot 14,\ 0 \cdot 36,\ 0 \cdot 64,\ 0 \cdot 74,\ 0 \cdot 004,\ 0 \cdot 005,\ 0 \cdot 006,\ 0 \cdot 007$$

1.17 Wythoff-Türme

Grundy-Wert für den Turm auf einem Brett, das oben links ein Loch im Rand hat:

grundy($*x \rhd *y$)	$y=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	18	19
3	3	4	0	1	2	7	5	9	6	8	12	13	10	11	16	14	18	15	17	21	22
4	4	3	5	0	1	2	9	$\boxed{10}$	11	6	$\boxed{7}$	8	15	16	12	13	14	19	21	17	18
5	5	6	4	2	0	1	3	11	10	7	8	9	16	15	17	12	13	14	22	23	24
6	6	5	7	8	9	0	1	2	3	4	13	14	11	10	18	19	12	20	15	16	17
7	7	8	6	9	10	3	0	1	2	5	4	15	17	18	11	20	19	12	13	14	16
8	8	7	9	6	11	10	2	0	1	3	5	4	18	17	19	21	20	13	12	15	14
9	9	10	8	7	6	11	4	3	0	1	2	5	19	20	21	18	22	23	14	12	13
10	10	9	11	12	7	8	13	4	5	0	1	2	3	6	20	22	21	24	16	25	15
11	11	12	10	13	8	9	14	5	4	2	0	1	6	3	7	23	24	21	25	22	26
12	12	11	13	10	14	15	16	17	18	19	3	0	1	2	4	5	6	7	8	9	23
13	13	14	12	11	15	16	10	18	17	20	6	3	0	1	2	4	5	8	7	24	9
14	14	13	15	16	12	17	11	19	20	18	21	6	2	0	1	3	4	5	9	7	8
15	15	16	14	17	13	12	18	20	19	21	22	7	4	5	0	1	2	3	6	8	10
16	16	15	17	14	18	13	12	21	22	23	19	20	5	4	3	0	1	2	10	6	7
17	17	18	16	15	19	14	20	12	13	22	23	21	7	8	5	2	0	1	3	4	6
18	18	17	19	20	16	21	15	13	12	14	24	22	8	7	6	9	3	0	1	2	4
19	19	20	18	21	17	22	23	14	15	12	16	24	9	25	8	6	7	4	0	1	2
20	20	19	21	18	22	23	17	15	14	13	25	16	24	9	10	7	8	6	2	0	1
21	21	22	20	19	23	18	24	16	25	15	14	17	26	27	9	8	10	11	4	3	0

Grundy-Wert für einen Turm, der das Feld ganz oben links nicht betreten darf:

grundy($*x + *y)^-$	y= 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x= 0	$\perp$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13	14	12	16	17	15	19	20	18
3	2	3	4	0	1	6	8	5	9	7	12	13	10	11	15	17	14	18	16	21	22
4	3	4	5	1	0	2	9	10	11	6	$\boxed{7}$	8	14	15	16	12	13	19	20	17	21
5	4	5	3	6	2	0	1	9	10	11	8	7	15	16	17	13	12	14	21	22	23
6	5	6	7	8	9	1	0	2	3	4	13	12	16	10	11	18	19	20	14	15	17
7	6	7	8	5	$\boxed{10}$	9	2	0	1	3	4	14	17	18	19	11	20	12	13	16	15
8	7	8	6	9	11	10	3	1	0	2	5	4	18	17	20	19	21	13	12	14	16
9	8	9	10	7	6	11	4	3	2	0	1	5	19	20	18	21	22	23	15	12	13
10	9	10	11	12	7	8	13	4	5	1	0	2	3	6	21	20	18	22	23	24	14
11	10	11	9	13	8	7	12	14	4	5	2	0	1	3	6	22	23	21	24	25	26
12	11	12	13	10	14	15	16	17	18	19	3	1	0	2	4	5	6	7	8	9	24
13	12	13	14	11	15	16	10	18	17	20	6	3	2	0	1	4	5	8	7	23	9
14	13	14	12	15	16	17	11	19	20	18	21	6	4	1	0	2	3	5	9	7	8
15	14	15	16	17	12	13	18	11	19	21	20	22	5	4	2	0	1	3	6	8	7
16	15	16	17	14	13	12	19	20	21	22	18	23	6	5	3	1	0	2	4	10	11
17	16	17	15	18	19	14	20	12	13	23	22	21	7	8	5	3	2	0	1	4	6
18	17	18	19	16	20	21	14	13	12	15	23	24	8	7	9	6	4	1	0	2	3
19	18	19	20	21	17	22	15	16	14	12	24	25	9	23	7	8	10	4	2	0	1
20	19	20	18	22	21	23	17	15	16	13	14	26	24	9	8	7	11	6	3	1	0

Satz 69 (Flammenkamp, 2001).

$$\forall x, y, z: \quad x \rhd y = z \iff x \pm z = y \iff z \pm x = y \iff z \rhd y = x$$

In den Tabellen sind die entsprechenden Werte für $x = 4, y = 7, z = 10$ markiert.

Wer findet einen kurzen Beweis? (Der bekommt einen Preis :-)

1.18 (Grünes) Hackenbush

Bei diesem Spiel löschen die beiden Spieler abwechselnd Kanten in einem Graphen.

- Spielposition (G, W): ein Graph $G = (V, E)$ und eine Menge $W \subseteq V$ von *Wurzeln*
- Spielzug: wähle eine Kante $e \in E$. Die nächste Spielposition G' sind die Knoten und Kanten von $G \setminus \{e\}$, die noch mit W verbunden sind.

Es gibt keine Beschränkungen bei der Wahl der Kante. Später betrachten wir aber Hackenbush mit gefärbten Kanten. Im Moment sind jedoch alle Kanten grün (d. h. erlaubt).

Hackenbush-Pfade entsprechen Nim-Haufen, also:

Ein Pfad $x_0 - x_1 - \ldots - x_n$ mit Wurzel x_0 hat als Optionen alle kürzeren Pfade, und deswegen Grundy-Wert n.

Eine Wiese aus disjunkten Pfaden mit den Längen $n_1, \ldots, n_k$ hat den Grundy-Wert $n_1 \oplus \ldots \oplus n_k$.

Für ein beliebige Hackenbush-Positionen (G, W_G) und (H, W_H) und einen Knoten $x \in G$ erklären wir die Position (das Spiel) $G :_x H$ als (G', W), wobei G' der Graph ist, den wir erhalten, wenn wir G und H disjunkt vereinigen und schließlich die Menge $\{x\} \cup W_H$ zu einem Punkt kontrahieren. Anschaulich: wir pflanzen den Graphen H im Punkt x an G.

Satz 70. $\text{grundy}(H) = \text{grundy}(H') \;\Rightarrow\; \text{grundy}(G :_x H) = \text{grundy}(G :_x H')$.

Proof. Der zweite Spieler hat offensichtlich eine Gewinnstrategie für das Spiel $(G :_x H) + (G :_x H')$, indem er stets alle Züge symmetrisch beantwortet. □

Satz 71. *Falls G ein Pfad $0 - x$ der Länge Eins ist, und $G_W = \{0\}$, dann ist* $\text{grundy}(G :_x H) = 1 + \text{grundy}(H)$.

Proof. Wir wählen H' als Pfad der Länge $\text{grundy}(H)$. □

Damit können wir grundy-Werte von Hackenbush-Bäumen ausrechnen.

Satz 72. *Für jeden Baum T mit Wurzel w und Kindern der Wurzel $T_1, \ldots, T_k$ gilt:* $\text{grundy}(T) = (1 + \text{grundy}(T_1)) \oplus \ldots \oplus (1 + \text{grundy}(T_k))$. □

Hackenbush auf Bäumen ist schon fast ein Term-Ersetzungs-Spiel, allerdings sind Term-Bäume geordnet und die Knoten haben fixierte Arität.

Ein Wald ist eine disjunkte Summe von Bäumen.

Satz 73. *Für alle Wälder T gilt* $\text{grundy}(T) \equiv |E(T)| \pmod 2$.

Proof. a) die Aussage gilt für alle Bäume: Mit den Bezeichnungen von Satz 72 gilt für die Kantenanzahl $|E(T)| = (1 + |E(T_1)|) + \ldots + (1 + |E(T_k)|)$. Einige $\oplus$ wurden also durch t ersetzt. Es gilt jedoch $x + y \equiv x \oplus y \pmod 2$, und daraus folgt die Behauptung.

b) Die Aussage gilt aus dem gleichen Grund für alle Summen von Bäumen. □

Brücken

Definition 74. *Eine Brücke* B_n *der Länge* n *ist ein Pfad* $0-1-\ldots-n$ *mit Wurzeln* $\{0, n\}$.

Satz 75. $\mathrm{grundy}(B_n) =$ *wenn* n *gerade ist, dann 0, sonst 1.*

Proof. Für gerade n gewinnt offenbar der zweite Spieler, indem er jeweils symmetrisch antwortet.

Für ungerade n folgt $\mathrm{grundy}(B_n) = 1$ aus diesen Aussagen:

a) B_n hat eine Option mit Wert 0: das ist das Löschen der Kante in der Mitte der Brücke.

b) B_n hat *keine* Option mit Wert 1: egal, welche Kante gelöscht wird, bleibt ein Wald (bestehend aus zwei Pfaden) übrig. Dieser hat gerade viele Kanten, also nach dem Paritätsprinzip (Satz 73) einen geraden Grundy-Wert, also niemals 1. □

Definition 76. *Der Ausdruck* $B(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ *bezeichnet eine mit Gräsern (Pfaden) der Längen* $n_0, \ldots, n_k$ *bewachsene Brücke der Länge* k.

(Die Gräser n_0, n_k wachsen direkt auf den Pfeilern, könnten also auch neben der Brücke stehen.)

Die wesentliche technische Aussage ist nun: Wir dürfen das Gras von der Brücke schieben.

Das beweisen wir in zwei Schritten: zunächst für gerade Brücken (das geht relativ einfach) und dann für ungerade.

Satz 77. *Für gerade* k *gilt:* $\mathrm{grundy}(B(n_0, n_1, \ldots, n_k)) = n_0 \oplus \ldots \oplus n_k$.

Proof. Wir zeigen, daß der zweite Spieler das Spiel $B(n_0, n_1, \ldots, n_k) + (n_1 + \ldots + n_k)$ gewinnt:

Spielt der erste Spieler in der Brücke selbst, entsteht ein Wald mit ungerade vielen Kanten, also nach dem Paritätsprinzip (Satz 73) einem ungeraden Grundy-Wert. Von dort kann der zweite Spieler zu 0 ziehen und gewinnen.

Spielt jedoch der erste Spiele in einem der Grashalme, antwortet der zweite Spieler symmetrisch (Gras auf der Brücke $\leftrightarrow$ Gras neben der Brücke) und gewinnt damit durch Induktion. □

Ungerade Brücken

Satz 78. *In jedem Spiel* $G = B(n_0, n_1, \ldots, n_k) + n_0 + \ldots + n_k$ *für ungerade* k *(eine Wiese auf der Brücke und nochmal die gleiche Wiese daneben) gibt es eine Option 0.*

Der folgende Beweis benötigt drei (später angeführte) Lemmata.

Proof. Der Satz ist richtig, wenn $k = 1$ ist. Wir erreichen eine 0 durch Löschen der (einzigen) Brückenkante.

Für größere Brücken konstruieren wir eine Rot/Blau-Färbung der Brückenkanten. Dabei sollen die Farben von $(i-1, 1)$ und $(i, i+1)$ genau dann wechseln, wenn n_i gerade ist.

Weil die Brückenlänge ungerade ist, benutzen wir dabei genau eine der Farben für eine gerade Anzahl von Kanten. Nennen wir die so gefärbten Kanten *gerade*.

Wir kontrahieren nun jede gerade Kante auf einen Punkt. Aus den Gräsern werden dabei Bäume, diese ersetzen wir durch ein äquivalentes Gras, und tun das gleichzeitig auch in der Wiese neben der Brücke.

Sodann halbieren wir alle Graslängen (und runden dabei nach unten, falls nötig).

Dadurch entsteht wieder ein Spiel der Form $G' = B(n'_0, n'_1, \ldots, n'_j) + n'_0 + \ldots + n'_j$ für ungerades j. Dort finden wir (nach Induktion) eine Brückenkante, durch deren Löschen wir eine Option (von G') mit Wert 0 erreichen.

Durch Spielen genau dieser Kanten in G erreichen wir *dort* auch eine 0. □

Die fehlenden Hilfs-Aussagen sind:

Lemma 79. *Durch Löschen einer geraden Kante entsteht eine Situation mit Grundy-Wert* $\equiv 2 \pmod 4$.

Lemma 80. *Durch Löschen einer ungeraden Kante entsteht eine Situation mit Grundy-Wert* $\equiv 0 \pmod 4$.

Lemma 81. *Falls* e *eine ungerade Brückenkante in* G *(also auch eine Brückenkante im kontrahierten* G'*) ist, dann ist* $\mathrm{grundy}(G' \setminus e) = \lfloor \mathrm{grundy}(G \setminus e)/2 \rfloor$.

Aufgabe 82. *Beweise!*

Aus dem Satz folgt schließlich

Satz 83. *Für ungerade* k *gilt:* $\mathrm{grundy}(B(n_0, n_1, \ldots, n_k)) = 1 \oplus n_0 \oplus \ldots \oplus n_k$.

Proof. Wir zeigen, daß $1 = \mathrm{grundy}(B(n_0, n_1, \ldots, n_k) + n_0 + \ldots + n_k)$.

a) Das Spiel hat keine Option mit Wert 1, denn alle Optionen sind gerade. Das folgt für Züge in der Gräsern nach Induktion, und für Züge in der Brücke aus dem Paritätsprinzip.

b) Das Spiel hat nach Satz 78 eine Option mit Wert 0. □

Kreise

Eine Brücke ist ein Kreis, der auf dem Boden steht. Nach dem Prinzip aus Satz 70 können wir damit auch Kreise in der Luft behandeln:

Satz 84. *Für jede beliebige Hackenbush-Position* (G, W) *mit einem Kreis* $x_0 - x_1 - \ldots x_k - x_0$ *als Teilgraph von* G *gilt:* $\mathrm{grundy}(G) = \mathrm{grundy}(G')$, *wobei wir* G' *aus* G *dadurch erhalten, daß wir alle Kreisknoten* $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ *auf einen einzigen Punkt kontrahieren.*

Beachte, daß beim Kontrahieren aus den Kreiskanten Schlingen entstehen. Diese sind natürlich äquivalent zu Pfaden (Gräasern) der Länge Eins. War der Kreis gerade, ist deren Nim-Summe 0, wir können sie also weglassen. Bei einem ungeraden Kreis müssen wir nur einen einzigen aufheben.

Proof. Falls der Satz nicht gilt, gibt es Gegenbeispiele, und wir wählen darunter ein kleinstes. Wir stellen fest, daß dies die Form eine mit Gras bewachsenen Brücke haben muß, da alle anderen Gegenbeispiele weiter verkleinert werden können. Für bewachsene Brücken haben wir jedoch die Behauptung bereits gezeigt. □

Kapitel 2

Term-Ersetzungs-Spiele

2.1 Term-Ersetzung

Siehe die Web-Seite http://theopc.informatik.uni-leipzig.de/~joe/trs/ Die Haskell-Quelltexte für die Programme zu Ersetzungs-Spielen kann man sich per CVS ansehen:

```
export CVSROOT=:pserver:anonymous@theopc.informatik.uni-
   leipzig.de:/home/joe/scratch/me
cvs checkout projekte/trs-games
```

Definition 85. *Eine* Signatur Σ *ist eine Menge von Funktionssymbolen. Jedem Symbol ist eine Stelligkeit (Arität) zugeordnet. Wir schreiben f^i, oder $f \in \Sigma_i$, wenn f die Arität i hat.*

Die nullstelligen Symbole teilen wir ein in Konstante *und* Variablen. *Die Menge der Variablen heißt V.*

Definition 86. *Die Menge* $\mathrm{Term}(\Sigma, V)$ *aller Terme über Σ mit Variablen V ist definiert durch*

- *jede Variable $v \in V$ ist ein Term.*
- *Wenn $f \in \Sigma_i$, und $t_1, \ldots, t_i \in \mathrm{Term}(\Sigma, V)$, dann ist $f(t_1, \ldots, t_i) \in \mathrm{Term}(\Sigma, V)$.*

Ein Term ohne Variablen heißt Grund-Term. Wir schreiben $\mathrm{Term}(\Sigma) = \mathrm{Term}(\Sigma, \emptyset)$.

```
data Term = Node { fun :: String
                 , args :: [ Term ]
                 }
          | Var { name :: String }
     deriving (Eq, Ord)
```

Definition 87. *Eine* Position *ist ein Wort $p \in \mathbb{N}^*$. Sie adressiert einen Teilterm:*

```
type Position = [ Int ]

positions :: Term -> [ Position ]
```

```
positions t = [] :
    case t of
         Node {} -> do     (k, arg) <- zip [1..] (args t)
                           p <- positions arg
                           return (k : p)
         _           -> []

peek :: Term -> Position -> Term
peek t [] = t
peek t @ (Node {} ) (k : p) = peek (args t !! (k-1)) p

poke :: Term -> Position -> Term -> Term
poke t [] s = s
poke t @ (Node {} ) (k : p) s =
    let (pre, x : post) = splitAt (k-1) (args t)
        y = poke x p s
    in  Node (fun t) (pre ++ y : post)
```

Für `peek t p` schreiben wir $t[p]$, für `poke t p s` schreiben wir $t[p := s]$.

Definition 88. *Eine* Substitution *ist eine Abbildung* $\sigma : V \to \mathrm{Term}(\Sigma)$. *Wir schreiben* $\sigma(t)$ *für den Term, der aus* t *entsteht, wenn wir* alle *Variablen* v *in* t *an ihrer Stelle durch* $\sigma(v)$ *ersetzen.*

```
type Subst = FiniteMap String Term

apply :: Subst -> Term -> Term
apply s (Var i) = case lookupFM s i of
      Just t -> t; Nothing -> Var i
apply s t @ (Node {}) = Node (fun t) ( map (apply s) ( args t ) )
```

Definition 89. *Ein* Muster *ist ein Term mit Variablen. Ein Muster* m paßt *auf einen Term* t*, wenn es eine Substitution* σ *gibt, so daß* $\sigma(m) = t$.

```
match :: MonadPlus m => Term -> Term -> m Subst
match _ (Var i) = error "Subst.match: variable in rhs"
match (Var i) t = return $ listToFM [ (i, t) ]
match t1 @ (Node {}) t2 @ (Node {}) = do
    guard $ fun t1 == fun t2
    guard $ length (args t1) == length (args t2)
    matches $ zip (args t1) (args t2)

matches :: MonadPlus m => [ (Term, Term) ] -> m Subst
matches [] = return $ emptyFM
matches ((x, y) : xys) = do
    s <- match x y
    t <- matches $ do (x, y) <- xys;  return (apply s x, y)
    return $ plusFM_C (error "Subst.matches") s t
```

Definition 90. *Ein Term-Ersetzungs-Sytem (TRS) ist eine Menge von Regeln.*

Eine Regel *ist ein Paar* $(l \to r)$ *von Termen mit Variablen.*

Eine Regel $(l \to r)$ paßt *auf einen Term* t *an der Stelle* p*, wenn ihre linke Seite* l *auf* $t[p]$ *paßt. Der Teilterm* $t[p]$ *heißt dann* Redex*.*

Ein Term s *entsteht durch* Anwendung *der Regel* $(l \to r)$ *auf den Term* t *an der Stelle* p*, wenn* l *auf* $t[p]$ *mit der Substitution* σ *paßt, und* $s = t[p := \sigma(r[p])]$*.*

Wir schreiben $t \to_R s$*, wenn* s *aus* t *durch genau eine Anwendung einer Regel aus* R *(an irgendeiner Position) entsteht.*

```
next_at :: TRS -> Term -> Position -> [ Term ]
next_at rules t p = do
    let x = peek t p
    y <- do (l, r) <- rules
            s <- match l x
            return $ apply s r
    return $ poke t p y

next :: TRS -> Term -> [ Term ]
next rules t = do
    p <- positions t
    next_at rules t p
```

Definition 91. *Ein Term ist in Normalform, wenn er keinen Redex enthält.*

```
normal :: TRS -> Term -> Bool
normal rules t = null (next rules t)
```

Definition 92. *Ein TRS R heißt* terminierend*, wenn die Relation* $\to_R$ *wohlfundiert ist (d. h. es gibt keine unendlich langen Reduktionsketten).*

Beachte: das ist nicht das gleiche wie “jeder Term besitzt eine Normalform”. Siehe Vorlesungen oder Bücher zur Termersetzung [BN98].

2.2 Nim-Spiele als TRS-Spiele

Signatur $\Sigma = \{B^2, U^1, Z^0\}$.

Regelmenge $R = \{(U(x) \to Z)\}$.

Der Term $B(B(U(U(U(Z))), U(U(Z))), U(Z))$ beschreibt ein Spiel mit Haufen der Größe $3, 2, 1$.

Wir können die B-Konstruktoren auch schachteln, aber trotzdem leicht den Grundy-Wert des Baums berechnen.

Aufgabe 93.

$$\text{grundy}(Z) = 0, \quad \text{grundy}(U(x)) = 1 + \text{grundy}(x), \quad \text{grundy}(B(x, y)) = ?$$

Aufgabe 94. *Dieses Spiel ist so ähnlich: Signatur $\{B^2, Z^0\}$, Regeln $\{B(x, y) \to Z\}$. Wie berechnet man die Grundy-Werte?*

Aufgabe 95. *Was passiert hier: Signatur $\{C^2, Z^0\}$, Regeln $\{C(x, y) \to x\}$.*

2.3 Take-und-Break-Spiele als TRS-Spiele

Wörter sind Terme, wir benutzen unäre Konstruktoren U^1, D^1 als Buchstaben, und Z^0 als rechtes Wort-Ende.

Das Wort $D^*U^{k_1}D^+U^{k_2}D^+\ldots$ beschreibt eine Situation mit Haufen der Größe $k_1, k_2, \ldots$.

Das Spiel Kayles (0.77) wird simuliert durch die Regelmenge

$$\{U \to D, UU \to D\}$$

Beachte: das ist die Wort-Schreibweise für die Term-Ersetzungs-Regeln

$$\{U(x) \to D(x), U(U(x)) \to D(x)\}$$

In diesen Regeln kommt jeweils nur eine Variable vor.

Definition 96. *Eine Regel $l \to r$ heißt linear, wenn die Mengen der Variablen in l und r gleich sind, und auf jeder Seite jede Variable genau einmal vorkommt.*

Satz 97. *Jedes oktale Spiel läßt sich durch ein lineares TRS simulieren.*

Beachte bei Kayles zudem, daß auf den rechten Regelseiten die Variablen nie mehr als Eins von der Wurzel entfernt sind (solche TRS heißt *monadisch*).

Beachte weiterhin, daß auf diese Weise keine hexadezimalen Spiele usw. kodiert werden können, weil wir den String nicht gleichzeitig an zwei Stellen durchschneiden können.

2.4 Grundy-Klassen

Definition 98. *Die Grundy-Klassen C_k eines Spiels sind*

$$C_k = \{x : \mathrm{grundy}(x) = k\}.$$

Beispiel: die Grundy-Klasse C_0 von Standard-Nim ist die Menge aller Wörter $\in \{D, U\}^*$

$$C_0 = \left\{ D^{d_0} U^{u_1} D^{d_1} \dots U^{u_n} D^{d_n} : \begin{array}{c} d_0 \geq 0, d_1 > 0, \dots, d_{n-1} > 0, d_n \geq 0, \\ u_1 > 0, \dots, u_n > 0, u_1 \oplus \dots \oplus u_n = 0 \end{array} \right\}.$$

Diese Sprache ist nicht regulär, denn $C_0 \cap U^* D U^* = \{U^n D U^n : n > 0\}$ ist nicht regulär.

Aufgabe 99. *Ist C_0 kontextfrei? Äquivalent dazu: kann ein Kellerautomat prüfen, ob das vorgelegte Wort die Nim-Summe 0 hat?*

Satz 100. *Wenn die Grundy-Folge eines oktalen Spiels (beschränkt und) schließlich periodisch ist, dann (besitzt es nur endlich viele Grundy-Klassen und) sind alle Grundy-Klassen reguläre Sprachen (wenn wir die obige Unär-Kodierung benutzen).*

Proof. (Schema.) Wir zeigen, daß für jedes n ein endlicher Automat A_n entscheiden kann, ob $\mathrm{grundy}(w) = n$.

Der Automat kann $\mathrm{grundy}(U^k)$ mit endlich vielen Zuständen berechnen. Er benötigt soviele, wie die Summe der Längen der Vorperiode und Periode der Grundyfolge.

Für eine Eingabe der Form $U^{k_1} D U^{k_2}$ muß sich der Automat während der Berechnung von $\mathrm{grundy}(k_2)$ auch den Wert $\mathrm{grundy}(k_1)$ merken, und schließlich beide addieren. Zum gleichzeitigen Merken und Rechnen müssen wir die Zustandszahl quadieren. Die Addition können wir fest verdrahten, da nur endlich viele Argument-Paare auftreten können. □

Aufgabe 101. *Schreibe für ein geeignet gewähltes (nicht triviales, aber überschaubares) oktales Spiel die regulären Ausdrücke für die Grundy-Klassen auf.*

Beispiele:

Spiel	0,05	0,22	0,26
Periode	10	120	1230

2.5 Hauptvermutung

Eine wesentliche Motivation für die Untersuchung von Term-Ersetzungs-Spielen ist die folgende: man möchte tatsächlich gern die Hauptvermutung über oktale Spiele beweisen (oder widerlegen), indem man sie für andere (allgemeinere oder ähnliche) Spiele untersucht.

Damit man jedoch die Vermutung überhaupt formulieren kann, benötigt man die Begriffe Endlichkeit und schließliche Periodizität. Ob ein Spiel endlich oder unendlich viele nichtleere Grundy-Klassen hat, ist in jedem Fall eine sinnvolle Frage.

Wie sollte man aber *die Grundy-Folge ist schließlich periodisch* übersetzen? Wenn das Spiel überhaupt nicht aus disjunkten Haufen besteht, dann gibt es überhaupt keine Grundy-*Folge*.

Wie wir aber festgestellt haben, ist die Forderung äquivalent zu *die Grundy-Klassen sind reguläre Sprachen*. Nun gibt es aber reguläre Sprachen nicht nur von Wörtern, die Haufen kodieren, sondern auch von anderen Objekten, zum Beispiel Bäumen (Termen).

Ausführlich behandele ich das in meiner Vorlesung im nächsten Semester (Automaten für Bäume, Bilder und andere Strukturen, http://www.informatik.uni-leipzig.de/~joe/edu/ss02/auto) zur Zeit genügt die intuitive Vorstellung, daß man die Begriffe *endlicher Automat* und *reguläre (rechtslineare) Grammatik* ganz natürlich für Baumsprachen erklären kann.

Beispiel: Signatur $\Sigma = \{B^2, I^0\}$. Die folgende reguläre Grammatik mit Variablen G, U und Startsymbol U beschreibt die Menge aller Bäume mit ungerade vielen I:

$$\{U \to I \mid B(G,U) \mid B(U,G), \qquad G \to B(G,G) \mid B(U,U)\}.$$

Die Hauptvermutung für oktale Spiele gibt also Anlaß zu dieser Frage:

> Gegeben ein TRS R über einer Signatur Σ.
>
> - Wie kann man für einen Term $T \in \mathrm{Term}(\Sigma)$ den Wert $\mathrm{grundy}(T)$ berechnen?
> - Hat das Spiel auf R endlich viele Grundy-Klassen?
> - Wie kompliziert sind diese? Sind sie reguläre Baumsprachen?

Nun ist Wort- und Term-Ersetzung ein Turing-vollständiges Berechenbarkeits-Modell. Deswegen ist zu befürchten, daß Grundy-Klassen von TRS-Spielen im Allgemeinen beliebig kompliziert sind.

Interessant ist deswegen die Frage, für welche *eingeschränkten* TRS man Regularität der Grundy-Klassen zeigen kann. Diese Einschränkungen sollten zum einen durch die Analogie zu oktalen Spielen motiviert sein (d. h. *lineare* TRS), zum anderen durch bekannte Zusammenhänge zwischen regulären Baumsprachen und Ersetzungssystemen. (z. B. *monadische* TRS).

2.6 Grundy-Klassen und Set-Constraints

Wenn wir mit $R(X) = \{y : X \ni x \to_R y\}$ die Menge der Ein-Schritt-Nachfolger von Termen $x \in X$ bezeichnen, dann gelten für die Grundy-Klassen folgende Gleichungen:

$$\forall n \geq 0 : C_n = R^{-1}(C_0) \cap \ldots \cap R^{-1}(C_{c-1}) \cap (\mathrm{Term}(\Sigma) \setminus R^{-1}(C_n)).$$

Man muß sich also mit der Struktur der Lösungsmenge solcher Gleichungssysteme beschäftigen.

Wenn die R^{-1} nicht da wären, dann heißt so etwa Set Constraint System und hat eine Lösungstheorie, die besagt: man kann entscheiden, ob ein System eine Lösung besitzt, und falls ja, dann gibt es minimale Lösungen, und diese sind regulär und effektiv konstruierbar.

Nun ja, *effektiv* heißt in diesem Fall PSPACE-vollständig, aber damit kann man leben.

Mir sind keine Resultate bekannt über Set-Constraint-Systeme, die auch Rewrite-Relationen enthalten, obwohl es eine notwendige Bedingungen an TRS R gibt, für die $X \in \mathsf{REG} \Rightarrow R^{-1}(X) \in \mathsf{REG}$. Müßte man mal überlegen, wie sich das kombinieren läßt.

2.7 Beispiele

2.7.1 CL(I)

Signatur: $\{@^2, I^0\}$, Regeln: $\{@(I, x) \to x\}$.

Normalformen: $\{I\}$.

Da bei jeder Reduktion genau ein I gelöscht wird, und schließlich nur eins übrigbleibt, ist von vornherein klar, wer gewinnt, da das nur davon abhängt, ob die Anzahl der I gerade oder ungerade ist.

Das Spiel hat also nur zwei Grundy-Klassen C_0, C_1 und beide sind regulär (siehe früheres Beispiel).

2.7.2 CL(K)

Signatur: $\{@^2, K^0\}$, Regeln: $\{@(@(K, x), y) \to x\}$.

Normalformen: $\{K_n : n \geq 1\}$ mit $K_1 = K, K_{n+1} = @(K_n, K)$.

Wir lassen jetzt die Konstruktoren @ weg sowie manche Klammern, und schreiben $@(@(K, x), y) = (Kxy)$, aber $@(K, @(K, K)) = (K(KK))$.

Satz 102. $\mathrm{grundy}(KKY) = 1 + \mathrm{grundy}(Y)$

Proof. $KKY = \{KKy : y \in Y\} \cup \{K\}$, deswegen $\mathrm{grundy}(KKY) = \mathrm{mex}\{\mathrm{grundy}(KKy) : y \in Y\} \cup \{0\} = \mathrm{mex}\{1, \ldots, \mathrm{grundy}(Y) - 1 + 1, 0\} = \mathrm{grundy}(Y) + 1$. □

Folgerung 103. *In CL(K) gilt* $\forall n \geq 0 \exists X \in \mathrm{Term} : \mathrm{grundy}(X) = n$.

Aufgabe 104. *Beweise* $\forall X, Y \in \mathrm{Term}$*:*

$$\begin{aligned} \mathrm{grundy}(KXY) &= \mathrm{grundy}(X) \oplus (1 + \mathrm{grundy}(Y)) \\ \mathrm{grundy}(KKXY) &= (1 + \mathrm{grundy}(X)) \oplus \mathrm{grundy}(Y) \end{aligned}$$

Bemerkung 105. *In CL(K) gilt* nicht immer*:*

$$\forall X, Y, Y' \in \mathrm{Term}, p \in \mathsf{pos}(X) : Y \approx Y' \Rightarrow X[p := Y] \approx X[p := Y']$$

Proof. Für $X = (KK), p = [1], Y = K, Y' = (KK)$ gilt: $\mathrm{grundy}(Y) = grundy(K) = 0 = \mathrm{grundy}(Y') = \mathrm{grundy}(KK)$, aber $\mathrm{grundy}(X[p := Y]) = \mathrm{grundy}(KK) = 0 \neq 1 = \mathrm{grundy}(KKK) = \mathrm{grundy}(X[p := Y'])$. □

Kapitel 3

Zusammensetzungen von (neutralen) Spielen

3.1 Seqentielle Summe

Wir kennen bereits die *disjunkte Summe* von Spielen G, H. Sie ist definiert durch

$$G + H := \{g + H : g \in G\} \cup \{G + h : h \in H\}.$$

Stromquist und Ullman [SU93] definieren:

Definition 106. *Die* sequentielle Summe *(sequential compound) von Spielen G, H ist das Spiel $G \to H$ mit*

$$G \to H := (\text{ wenn } \emptyset = G \text{ dann } H \text{ sonst } \{g \to H : g \in G\})$$

Die folgenden Resultate stammen aus angegebenem Artikel.

Satz 107. *Die Operation $\to$ ist assoziativ, und es gilt $0 \to G = G = G \to 0$.*

Wir setzen $M(x, y) = (*x + *y) \to *1$ und berechnen $m(x, y) = \mathrm{grundy}(M(x, y))$: die Optionen von $M(0, 0)$ sind $\{0\}$, die der anderen $M(x, y)$ sind $\{M(0, y), \ldots, M(x - 1, y)\} \cup \{M(x, 0), \ldots, M(x, y - 1)\}$. Wir können das also leicht aus einer Tabelle ablesen, in der wir oben links 1 eintragen, und ansonsten einen nordwestlichen Turm drauf ziehen lassen.

$m(x,y)$	$y=0$	1	2	3	4
$x=0$	1	0	2	3	4
1	0	1	3	2	5
2	2	3	0	1	6
3	3	2	1	0	7
4	4	5	6	7	0

Bemerkung 108. *Es gilt* nicht *für alle Spiele G, G', H: wenn $G \approx G'$, dann $G \to H \approx G' \to H$.*

Proof. $\mathrm{grundy}((*2 + *2) \to *1) = 0 \neq 1 = \mathrm{grundy}(0 \to *1)$. ◻

Satz 109.

$$\begin{aligned}\text{grundy}((*x + *y) \to *1) &= \textit{wenn } (x \leq 1 \wedge y \leq 1)\\ &\quad \textit{dann } (x + y + 1 \bmod 2)\\ &\quad \textit{sonst } x \oplus y.\end{aligned}$$

Während $G \to *1$ gerade die Misère-Version von G ist, und die Grundy-Werte für $(*x + *y) \to *1$ leicht zu berechnen, kann man bereits über das folgende Spiel wenig sagen:

grundy$((*x + *y) \to *2)$	$y = 0$	1	2	3	4
$x = 0$	2	0	1	3	4
1	0	1	2	4	3
2	1	2	0	5	6
3	3	4	5	0	1
4	4	3	6	1	0

3.2 Seqentielles Spektrum

Rechts vom Pfeil bleibt jedoch starke Äquivalenz erhalten:

Satz 110. $\forall G, H, H' : H \approx H' \Rightarrow G \to H \approx G \to H'$.

Deswegen können wir jedem Spiel G sein Spektrum zuordnen:

Definition 111. *Das Spektrum* $\mathsf{spec}(G)$ *ist die Funktion* $n \mapsto \text{grundy}(G \to *n)$.

Wie der folgende Satz zeigt, ist das ein sinnvoller Begriff:

Satz 112. $\mathsf{spec}(G \to H) = \mathsf{spec}G \circ \mathsf{spec}H$.

Dabei ist $\circ$ die Funktions-Komposition.

Proof. $\mathsf{spec}(G \to H)(n) = \text{grundy}((G \to H) \to *n) = \text{grundy}(G \to (H \to *n)) = \text{grundy}(G \to *\mathsf{spec}(H)(n)) = \mathsf{spec}(G)(\mathsf{spec}(H)(n)) = (\mathsf{spec}(G) \circ \mathsf{spec}(H))(n)$. □

Aufgabe 113. *Finde eine geschlossene Formel für* $\mathsf{spec}(*m)$.

d. h. also für grundy$(*m \to *n)$.

Satz 114. *Für jedes* $G \neq 0$ *ist* $\mathsf{spec}(G)$ *schließlich konstant.*

Beispiel: $\mathsf{spec}(*19{+}13) = (30, 30, 29, 27, 9, 9, 25, 24, 25, 10, 23, 23, 23, 24, 24, 22, 24, 23, \ldots)$

Aufgabe 115. *Berechne* $\mathsf{spec}(*2 + *5)$. *Berechne und erkläre* $\mathsf{spec}(*x + *y)$.

3.3 Gekürzte und Misere-Spiele

Definition 116. *Das verkürzte Spiel G^- geht wie G, aber Züge zu 0 sind verboten:*

$$G^- := \{g : g \in G, g \neq \emptyset\}$$

Wir erinnern uns an den Nordwest-Turm, der nicht nach $(0,0)$ ziehen darf. Wir erkennen jetzt darin das Spiel $(*x + *y)^-$.

Bemerkung 117. *Im Allgemeinen $G^- \not\approx (G \to *)$.*

Proof. Zur Erinnerung nochmal die Tabelle

$\text{grundy}(*x + *y)^-$	$y = 0$	1	2	3	4
$x = 0$	0	0	1	2	3
1	0	1	2	3	4
2	1	2	0	4	5
3	2	3	4	0	1
4	3	4	5	1	0

Damit gilt z. B. $\text{grundy}(*2 + *3)^- = 4 \neq \text{grundy}((*2 + *3) \to *1)$. □

Satz 118. $(G \to *)^- = G$.

Bemerkung 119. *Aber im Allgemeinen nicht $G^- \to * = G$.*

3.4 Schwach sequentielle Summe

Definition 120. $G \Rightarrow H := \{g \Rightarrow H : g \in G\} \cup H$

Das bedeutet, wir können in G spielen, aber zu jedem Zeitpunkt nach H wechseln — von dort jedoch nicht mehr zurück.

Satz 121. $(*n \Rightarrow *) = *(n+1)$.

Satz 122. $(G \Rightarrow *)^- = G$.

Bemerkung 123. *Aber im Allgemeinen nicht $(G^- \Rightarrow *) = G$.*

Rechts vom Pfeil bleibt Äquivalenz erhalten:

Satz 124. $\forall G, H, H'$: *wenn $H \approx H'$, dann $G \Rightarrow H \approx G \Rightarrow H'$.*

3.5 Die annihilierende Summe

Definition 125.

$$\begin{aligned} G \rhd H \quad := \quad & \{g \rhd H : g \in G\} \cup \{G \rhd h : h \in H\} \\ & \cup (\textit{ wenn } G = \emptyset \textit{ dann } \{\emptyset\} \textit{ sonst } \emptyset) \end{aligned}$$

Das bedeutet, wir können in G oder H spielen, oder aber, wenn es in G keine Optionen mehr gibt, insgesamt zu $\emptyset$ ziehen. Das nennen wir *annihilieren* (vernichten).

Das typische Beispiel ist der Turm, der nur nach Norden oder Westen ziehen darf und *zusätzlich*, falls er auf der obersten (nördlichen) Zeile steht, nach Westen vom Brett springen kann.

Ein Turm auf (x, y) hat den Wert $*x \rhd *y$.

Direkt aus der Definition ist abzulesen:

Satz 126. $(0 \rhd H) = (H \Rightarrow *)$.

Weiter gilt, daß rechts vom $\rhd$ die starke Äquivalenz erhalten bleibt:

Satz 127. $\forall G, H, H' :$ *wenn* $H \approx H'$, *dann* $(G \rhd H) \approx (G \rhd H')$.

Proof. Wir zeigen durch Induktion, daß unter diesen Voraussetzungen $(G \rhd H) + (G \rhd H')$ für den ersten Spieler verloren ist. Spielt der erste in G, antwortet der zweite in dem anderen G. Spiel der erste in H, antwortet der zweite in H'. (Das ist möglich wegen $L(H + H')$ nach Voraussaetzung.) Analog wird ein Zug in H' durch einen Zug in H beantwortet. Annihiliert schließlich der erste Spieler ein Teilspiel, annihiliert der zweite das andere. $\square$

Bemerkung 128. *Die Behauptung wenn* $G \approx G'$, *dann* $(G \rhd H) \approx (G' \rhd H)$ *ist nicht allgemeingültig.*

Proof. Wir setzen $G = 0, G' = *1 + *1, H = *1$. Dann ist $G \rhd H = 0 \rhd * = \{0 \rhd 0, 0\} = \{*1, 0\} = *2$, andererseits $G' \rhd H = (* + *) \rhd * = \{* \rhd *, (* + *) \rhd 0\} = \{*, *\} \approx 0$. $\square$

Der obige Beweis schlägt im Allgemeinen fehl, da ein Annihilationszug in $(G \rhd H)$ dann nicht durch eine Annihilation in $(G' \rhd H)$ beantwortet werden kann, wenn G tatsächlich das Spiel $\emptyset$ (ohne Optionen) ist, aber G' irgendein *anderes* Spiel mit grundy$(G) = 0$ (d. h. nur mit reversiblen Optionen).

Der schon früher erwähnte Satz von Flammenkamp lautet nun

Satz 129. *Für alle G, H, I, bei denen I ein Spiel der Form $*i$ ist, und G, I nicht beide $\emptyset$ sind, gilt* $(G \rhd H) \approx I \iff H \approx (G+I)^-$.

Proof. Nach Satz 127 genügt es zu zeigen, daß $(G \rhd (G+I)^-) \approx I$. Dazu geben wir eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler in dem Spiel $(G \rhd (G+I)^-) + I$ an:

- Zieht der erste Spieler zu $(G \rhd (g+I)^-) + I$ für eine Option $g \in G$, antwortet der zweite mit $(g \rhd (g+I)^-) + I$, und hat damit (nach Induktion) für den nächsten Spieler eine Verluststellung hergestellt.
- Zieht der erste Spieler zu $(g \rhd (G+I)^-) + I$ für ein $g \in G$, und nicht gleichzeitig $I = g = \emptyset$, antwortet der zweite Spieler mit dem Zug zu $(g \rhd (g+I)^-) + I$, und hat damit nach Induktion gewonnen.
- Falls jedoch $g = I = \emptyset$, dann annihiliert der zweite Spieler die linke Summe und zieht zu $0 + I = 0 + 0 = 0$ und hat auch gewonnen.
- Zieht der erste Spieler zu $(G \rhd (G+i)^-) + I$ für ein $i \in I$, antwortet der zweite mit $(G \rhd (G+i)^-) + i$ und hat gewonnen.
- Zeiht der erste Spieler zu $(G \rhd (G+I)^-) + i$ für ein $i \in I$, und gilt nicht gleichzeitig $G = i = \emptyset$, dann antwortet der zweite mit $(G \rhd (G+i)^-) + i$ und hat gewonnen.
- Gilt jedoch $g = I = \emptyset$, annihiliert der zweite Spieler die linke Summe und hat (wie oben) gewonnen.
- Annihiliert jedoch der erste Spieler sofort, entsteht $0 + I$. Das war aber nur erlaubt, falls $G = \emptyset$. Wegen der Voraussetzung ist dann $I \neq \emptyset$. Da I ein Spiel der Form $*i$ ist, bedeutet das, daß $I \not\approx \emptyset$ ist, und deswegen eine Option $0 \in I$ besitzt. Zu der zieht der zweite Spieler und gewinnt.

□

Satz 130. *Für alle $g, h, i \in \mathbb{N}$, gilt* $(*g \rhd *h) \approx *i \iff (*i \rhd *h) \approx *g$.

Proof. Nach Satz 129 gilt $(G \rhd H) \approx I \iff H \approx (G+I)^- \iff H = (I+G)^- \iff (I \rhd H) \approx G$. □

3.6 Summen und Ersetzungsspiele

Sequentielle Summen (jeder Art) können wir (hoffentlich) benutzen, um Ersetzungsspiele zu beschreiben.

Die annihilierende Summe paßt gut zu löschenden TRS, wie die Beispiel zeigen:

3.6.1 CL(G) für $Gx \to G$

Signatur: $\{@^2, G^o\}$, Regel: $@(G, x) \to G$.

Das ist zwar kein reiner Kombinator (weil auf der rechten Seite der Regel keine reine Kombination aus Variablen steht), aber trotzdem interessant.

Satz 131. $@(X, Y) \;=\; X \rhd Y.$

Proof. Die Optionen von $@(X, Y)$ sind: spiele in X oder spiele in Y oder, falls $X = G = 0$, reduziere in der Wurzel (zu $G = 0$). Das ist genau das gleiche wie die Optionen von $X \rhd Y$. □

Satz 132. $\forall n \exists X : n = \operatorname{grundy}(X)$.

Proof. Definiere $G_0 = G, G_{n+1} = @(G, G_n)$. Dann gilt $\forall n : \operatorname{grundy}(G_n) = n$, wie man durch Induktion sieht:

Anfang: $G_0 = G = 0$.

Schritt: $G_{n+1} = @(G, G_n) = G \rhd G_n = 0 \rhd *n = *n \Rightarrow * = *(n + 1)$. □

Satz 133. *Die Grundy-Klasse C_0 für dieses Spiel ist nicht regulär.*

Proof. (Schema) Wir bezeichnen Menge der im Beweis zu Satz 132 konstruierten Terme mit $G_* = \{G_0, G_1, \ldots\}$. Offensichtlich $G_* \in \mathsf{REG}$.

Es gilt $C_0 \cap @(G_*, G_*) = \{@(G_{n+1}, G_n) : n \geq 0\}$, und das ist wegen eines Pumping-Arguments keine reguläre Sprache. Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 134. *Ist C_0 (ist jedes C_n) eine kontextfreie Baumsprache?*

3.6.2 CL(K) für $Kxy \to x$

(siehe Abschnitt 2.7.2)

Wegen Satz 126 gilt

Folgerung 135.

$$\begin{aligned} KXY &= X + (Y \Rightarrow *) = X + (0 \rhd Y) \\ KKXY &= (X \Rightarrow *) + Y = (0 \rhd X) + Y \end{aligned}$$

Satz 136.

$$K(KK)XY = (0 \rhd X) \rhd Y$$

Proof. Einerseits $K(KK)XY = \{K(KK)xY : x \in X\} \cup \{K(KK)Xy : y \in Y\} \cup \{KKY\} = \{K(KK)xY : x \in X\} \cup \{K(KK)Xy : y \in Y\} \cup \{0 \rhd Y\}$, andererseits $(0 \rhd X) \rhd Y = \{x' \rhd Y : x' \in 0 \rhd X\} \cup \{(0 \rhd Y) \rhd y : y \in Y\} = \{0 \rhd Y\} \cup \{(0 \rhd x) \rhd Y : x \in X\} \cup \{(0 \rhd Y) \rhd y : y \in Y\}$, und die Behauptung folgt durch Induktion. □

Aufgabe 137. *Finde weitere K-Terme (mit Variablen), zu denen es äquivalente Spiele gibt, die nur aus* $0, \rhd, +$ *und den Variablen konstruiert sind.*

Kapitel 4

Farbige Spiele

4.1 Beispiele für farbige Spiele

Wir kommen nun (endlich) zum allgemeinen Begriff des endlichen Zweipersonen-Nullsummenspiels mit vollständiger Information und normaler Ende-Bedingung.

Wir erweitern neutrale Spiele dadurch, daß wir nicht mehr darauf bestehen, daß beide Spieler immer die gleichen Optionen haben müssen.

Deswegen müssen wir die Spieler unterscheiden, der eine heißt Links (L), der andere Rechts (R). (Falls es um Farben geht, dann Links = bLau, Rechts = Rot, und Grün = Beide.)

4.1.1 (Technicolor) Hackenbush

Spielpositionen sind Graphen $G = (V, E)$ mit einer Menge $W \subseteq V$ von Wurzeln und einer Kantenfärbung $f : E \to \{\mathsf{rot}, \mathsf{blau}, \mathsf{grün}\}$.

Ein erlaubter Spielzug für L ist das Löschen einer blauen oder grünen Kante; ein erlaubter Spielzug für R ist das Löschen einer roten oder grünen Kante.

Wurde $e \in E$ gelöscht, entsteht die neue Spielposition G' = alle Knoten (und ihre Kanten) von $G \setminus e$, die noch durch Pfade mit W verbunden sind.

Sind alle Kanten grün, ist das genau das bereits untersuchte neutrale Hackenbush. Wir werden bald den Spezialfall untersuchen, daß *keine* Kante grün ist.

4.1.2 Domineering

Spielpositionen sind Teile von Schachbrettern (Färbung ist egal).

Ein Spielzug für L ist das Löschen von zwei *über*einanderliegenden Quadraten, ein Spielzug für R ist das Löschen von zwei *neben*einanderliegenden Quadraten.

Praktisch spielt man das so, daß L und R Dominosteine auf das Brett legen: die L-Steine in Nord-Süd-Richtung, die R-Steine in Ost-West-Richtung.

4.2 Resultatklassen von farbigen Spielen

Farbige Spiele teilen wir bezüglich ihrer Resultate in vier Klassen (nicht zwei!).

Definition 138. *Für ein Spiel G definieren wir die Eigenschaften $G \approx 0, G > 0, G < 0, G \parallel 0$ durch diese Tabelle:*

Spiel G	*wenn L beginnt, dann hat R eine Gewinnstrategie*	*wenn L beginnt, dann hat L eine Gewinnstrategie*
wenn R beginnt, dann hat L eine Gewinnstrategie	*Null, $G \approx 0$, zweiter gewinnt*	*Positiv, $G > 0$, L gewinnt*
wenn R beginnt, dann hat R eine Gewinnstrategie	*Negativ, $G < 0$, R gewinnt*	*Fuzzy, $G \parallel 0$, erster gewinnt*

Bei neutralen Spielen gibt es nur Null und Fuzzy.

Beachte: *später* definieren wir die *zwei*stellligen Relationen $\approx, >, <, \parallel$. Hier jedoch muß auf einer Seite 0 stehen.

4.3 Definitionen

Definition 139. *Ein* Spiel *ist ein Paar von Mengen von Spielen.*

Wir schreiben $G = (G^L, G^R)$, und nennen jedes $g \in G^L$ eine linke Option*, sowie jedes $g \in G^R$ eine* rechte Option *von G.*

Für das Spiel $G = (\{g_1^L, \dots, g_m^L\}, \{g_1^R, \dots, g_n^R\})$
schreiben wir kürzer $G = \{g_1^L, \dots, g_m^L \mid g_1^R, \dots, g_n^R\}$.

Definition 140. *Das einfachste Spiel ist $(\emptyset, \emptyset) = \{|\}$, es heißt 0.*

Wir sagen, das Spiel 0 wurde am Tag 0 erschaffen.

Die Spiele vom Tag Eins sind die, deren Optionen sämtliche vom Tag 0 stammen:

$$(\{0\}, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (\{0\}, \{0\}).$$

Wir wollen aber wirklich ab jetzt diese Schreibweise verwenden:

$$\{0 \mid \ \}, \{\ \mid 0\}, \{0 \mid 0\}.$$

Das Spiel $\{0 \mid 0\}$ kennen wir schon, es ist ein neutrales Spiel, und heißt $*$.

Wir vergeben sinnvolle Namen für die beiden anderen: $1 := \{0 \mid \ \}, \ -1 := \{\ \mid 0\}$.

4.4 Numbers und Nimbers

Allgemein soll die Zahl n bedeuten: L kann noch n Züge ausführen, aber R gar keinen:

Definition 141. *Zu jeder Zahl $z \in \mathbb{Z}$ definieren wir ein Spiel durch*

- $0 := \{|\}$
- *für $n \geq 0$:* $(n+1) := \{0, 1, \ldots, n \mid \ \}$
- *für $n \geq 0$:* $-(n+1) := \{ \ \mid 0, -1, \ldots, -n\}$

Vorsicht — diese Spiele n sind nicht zu verwechseln mit den neutralen Spielen $*n$, deren Definition wir hier zur Sicherheit wiederholen:

Definition 142. *Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das Spiel $*n$ durch*

- $0 := \{|\}$
- $*(n+1) := \{0, *1, \ldots, *n \mid 0, *1, \ldots, *n\}$

Im Englischen heißen die Spiele nach Definition 141 *numbers*, und die nach Definition 142 *nimbers* (wegen ihrer Herkunft vom Nim-Spiel).

Nochmal Vorsicht — es gibt außer numbers und nimbers noch viele viele andere Spiele. Am Tag Zwei entstehen (unter anderem)

Definition 143. $\uparrow := \{0 \mid *\}$, $\downarrow := \{* \mid 0\}$, $\pm 1 := \{1 \mid -1\}$.

4.5 Addieren, Subtrahieren

Da wir schon Zahlen verwenden, erwarten wir auch, daß die üblichen Rechenregeln gelten, wie zum Beispiel $4 + (-1) = 3$ und $1 > 0$.

Definition 144. *Die* disjunkte Summe $G + H$ *von Spielen* $G = (G^L, G^R), H = (H^L, H^R)$ *ist das Spiel*

$$(\{g + H : g \in G^L\} \cup \{G + h : h \in H^L\}, \{g + H : g \in G^R\} \cup \{G + h : h \in H^R\}).$$

Satz 145. *Die Operation $+$ ist assoziativ und kommutativ, und 0 ist neutrales Element.*

Wir erhalten das Entgegengesetzte eines Spiels, wenn wir *überall* die Optionen von L und R vertauschen:

Definition 146. *Das* Negativ $-G$ *des Spiels* $G = (G^L, G^R)$ *ist das Spiel*

$$(\{-g : g \in G^R\}, \{-g : g \in G^L\}).$$

Aufgabe 147. *Verifiziere $-n = -(n)$ für numbers, und $*n = -(*n)$ für nimbers.*

Gilt nun für alle G, daß $G + (-G) = 0$? Nein, nur ≈ 0, für eine geeignet definierte Relation $\approx$.

Für neutrale Spiele kennen wir diese schon, für farbige Spiele definieren wir sie jetzt über einen kleinen Umweg, und zeigen schließlich, daß das Resultat mit dem für neutrale erwarteten übereinstimmt.

4.6 Vergleich von Spielen

Wir definieren eine Prä-Ordnung (d. h. transitive, reflexive Relation) $\gtrsim$ mit der Intention $G \gtrsim H$, wenn G für Spieler L besser ist als H (oder genausogut). Dann setzen wir $G \approx H$ wenn $G \lesssim H \wedge G \gtrsim H$.

Definition 148. *$G \gtrsim H$, falls $\neg \exists g \in G^R : g \lesssim H$ und $\neg \exists h \in H^L : G \lesssim h$.*

$H \lesssim G :\iff G \gtrsim H$.

$H > G :\iff H \gtrsim G \wedge H \not\lesssim G$

Beispiel 149. *$\uparrow > 0$.*

Proof. Zur Erinnerung: $\uparrow = \{0 \mid *\}$.

Wir zeigen zunächst $\uparrow \gtrsim 0$: Gibt es ein $\uparrow^R \lesssim 0$? Nein, die einzige Option ist $*$, aber $* \not\lesssim 0$. Gibt es ein $0^L \gtrsim \uparrow$? Nein, es gibt überhaupt kein 0^L.

Nun $\uparrow \not\lesssim 0$: dazu genügt es bereits, ein $\uparrow^L \lesssim 0$ zu finden, aber dazu reicht ja 0 selbst. □

Aufgabe 150. $\{1 \mid 0\} > \downarrow$, $\{1 \mid *\} > \uparrow$.

Aufgabe 151. *Zeichne das Hasse-Diagramm (bzgl. $<$) für alle Spiele vom Tag ≤ 2.*

Satz 152. *Wenn $G \gtrsim H$, dann $(G - H) \geq 0$.*

Die rechte Bedingung ist äquivalent zu: „Spieler L gewinnt $(G - H)$ als Nachziehender.“

Gewinnt er als Anziehender auch, ist das Spiel positiv ($G - H > 0$), gewinnt er nicht (sondern R), ist das Spiel $G - H = 0$; insgesamt also $(G - H) \geq 0$.

Proof. Aus $G \gtrsim H$ folgt $\forall g \in G^R : g \not\lesssim H$, also $\exists g' \in g^L : g' \gtrsim H$ oder $\exists h \in H^R : h \lesssim g$.

Wenn R also von $(G - H)$ zu $(g - H)$ zieht, kann das L mit Zug zu $(g - h)$ oder $(g' - H)$ beantworten, und gewinnt nach Induktion.

Falls R von $(G - H)$ zu $(G - h)$ zieht, folgt alles spiegelbildlich. □

Satz 153. *Für alle Spiele G gilt:*

1. *jedes* $G^L \not\gtrsim G$.
2. *jedes* $G^R \not\lesssim G$.
3. $G \lesssim G$.
4. $G \gtrsim G$.

Proof. Falls doch ein $g \in G^L$ mit $g \gtrsim G$, dann folgt, daß es kein $g' \in G^L$ mit $g' \gtrsim g$ gibt. Für $g' = g$ gilt jedoch (nach Induktion) $g' \gtrsim g$.

Die zweite Aussage folgt analog.

Um $G \lesssim G$ zu zeigen, verifizieren wir, daß kein $G^L \gtrsim G$ und kein $G^R \lesssim G$. Das sind aber genau die ersten beiden Aussagen.

Die vierte Behauptung folgt analog. □

Satz 154. $\lesssim$ *ist eine Prä-Ordnung (ist reflexiv und transitiv).*

Proof. Reflexivität folgt aus 153, Aussage 3 und 4.

Zur Transitivität: zu zeigen ist $G \gtrsim H \wedge H \gtrsim K \Rightarrow G \gtrsim K$.

a) es gibt kein $G^R \lesssim K$: falls doch, dann wäre (nach Induktion!) $G^R \lesssim K \wedge K \lesssim H \Rightarrow G^R \lesssim H$ im Widerspruch zu $G \gtrsim H$.

b) es gibt kein $K^L \gtrsim G$: falls doch, dann wäre $K^L \gtrsim G \wedge G \gtrsim H \Rightarrow K^L \gtrsim H$ im Widerspruch zu $H \gtrsim K$. □

Definition 155. $G \approx H :\iff G \lesssim H \wedge G \gtrsim H$.

Satz 156. $\approx$ *ist eine Äquivalenzrelation,*

Wir betrachten ab jetzt alle Spiele nur modulo $\approx$ (so, wie wir früher alle neutralen Spiele mit gleichem Grundy-Wert als äquivalent aufgefaßt haben) und schreiben ab jetzt $=$ anstelle von $\approx$ und $\geq, \leq$ anstelle von $\gtrsim, \lesssim$.

Satz 157. *Die Relation* $\geq$ *ist eine Halbordnung auf der Menge der* $\approx$*-Äquivalenzklassen.*

Bemerkung 158. $\geq$ *ist keine totale Ordung, da es unscharfe Spiele gibt. Wir haben schon* $0 \not\geq *$ *und* $0 \not\leq *$ *gesehen.*

4.7 Dominierte und Reversible Optionen

Satz 159. *Für alle Spiele G, g gilt $(G^L \cup g, G^R) \geq G$ sowie $G \geq (G^L, G^R \cup g)$.*

(anschaulich: eine zusätzliche Option schadet nicht — man muß sie ja nicht benutzen.)

Wir formulieren hier Definitionen und Aussagen nur für Links, natürlich gilt alles, passend symmetrisch übersetzt, auch für Rechts.

Lemma 160. *Falls $x \in G^L$, dann $G \not\leq x$.*

Proof. Es gibt je dann ein $G^L \geq x$, nämlich x selbst. □

Definition 161. *Die Option $g \in G^L$ heißt* dominiert durch *die Option $g' \in G^L$, wenn $g \leq g'$.*

Satz 162 (Dominierte Optionen weglassen). *Wenn $G = \{\ldots, g, \ldots, g', \ldots \mid \ldots\}$ und $g \leq g'$, dann $G \approx (G^L \setminus g, G^R)$.*

Proof. Nach satz 159 ist $G \geq (G^L \setminus g, G^R)$. Wir zeigen $G \leq (G^L \setminus g, G^R)$.

Es gibt kein $y \in (G^L \setminus g, G^R)^R$ mit $y \leq G$, weil kein $G^R \leq G$.

Es gibt kein $x \in G^L$ mit $x \geq (G^L \setminus g, G^R)$: entweder ist $x \neq g$, dann $x \in G^L$, und die Behauptung folgt aus dem Lemma, oder $x = g \leq g'$, dann folgt $g' \geq g = x \geq (G^L \setminus g, G^R)$ auch im Widerspruch zum Lemma. □

Definition 163. *Eine Rechts-Option $x \in G^R$ von G heißt* reversibel*, wenn sie sie eine Links-Option $y \in x^R$ besitzt mit $y \geq G$.*

Satz 164 (Reversible Optionen ersetzen). *Wenn x durch y revertiert wird, dann $G \approx (G^L, G^R \setminus x \cup y^R)$.*

Proof. Wir zeigen, daß in $(G^L, G^R) - (G^L, G^R \setminus x \cup y^R)$ immer der zweite Spieler gewinnt.

Zieht der erste in G^L oder $G^R \setminus x$, dann kann der zweite diesen Zug direkt beantworten.

Zieht der erste Spieler (R) im linken Spiel zu x, dann zieht L in diesem x zu y. Es entsteht das Spiel $y - (G^L, G^R \setminus x \cup y^R)$, in dem R dran ist. Spielt er links in y, dann kann dieser Zug rechts von L beantwortet werden. Spielt er links, entsteht $y - g$ für eine $g \in G^L$. Falls $y \leq g$, dann $G \leq y \leq g$ im Widerspruch zu $g \in G^L$ (eine linke Option von G kann nicht größer sein als G). Also ist $y \not\leq g$. Falls $y || g$, also $y - g || 0$, dann gewinnt derjenige, der jetzt dran ist, also L. Falls $y > g$, dann $y - g > 0$, dann gewinnt L auch.

Zieht der erste Spieler (L) im rechten Spiel zu einem $z \in y^R$, dann entsteht $G - z$, und R ist dran. Falls $z \leq G$, dann $z \leq G \leq y$, aber das ist Widerspruch zu $z \in y^R$. Also ist $z \not\leq G$ und damit $G - z \not\geq 0$. Falls $G - z || 0$, dann gewinnt derjenige, der dran ist, also R. Falls $G - z < 0$, dann gewinnt R auch. □

Aufgabe 165. *Welches sind die reversiblen Optionen in* $G = \{0, *, *2, *4 \mid 0, *, *2, *4\}$*?*

Die Option $*4$ wird revertiert (auf beiden Seiten)durch ihre Option $*3$, denn $G \approx *3$, also $G \geq 3$ und $G \leq 3$. Wir dürfen die $*4$ deswegen ersetzen durch die linken (bzw. rechten) Optionen von $*3$, und das sind $\{0, *, *2\}$. Also $G \approx \{0, *, *2 \mid 0, *, *2\}$. Wir erkenne die mex-Regel für neutrale Spiele hierin wieder.

Satz 166. *Zu jedem Spiel G gibt es genau ein Spiel H ohne dominierte und reversible Optionen mit $G \approx H$. Dieses heißt* einfachste *Form oder Normalform.*

Proof. Angenommen, es gibt Paare (G, H) von verschiedenen Spielen mit $G \approx H$ ohne dominierte und reversible Optionen. Betrachte das kleinste solche Paar. Wir spielen $G - H (= 0)$.

Weil $G \neq H$, gibt es o.B.d.A. ein $G^L \ni g \notin H^L$. Wenn L dorthin zieht, entsteht $g - H$. Jetzt ist R dran und muß nach Voraussetzung einen Gewinnzug haben.

- Falls dieser Zug zu $g - h$ führt, für ein $h \in H^L$, dann muß $g \leq h$ sein (damit eine Verlustsituation für L am Zug entsteht). Falls $g \approx h$, dann wäre aber wegen der Minimalität des Gegenbeispiels $g = h$, im Widerspruch zu $g \notin H^L$. Also ist $g < h$. Jetzt betrachten wir aber das Spiel $H - G$ und lassen L genau diesen Zug h ausfürhen. Das ergibt $h - G$. Es muß ein Antwortzug $g' \in G^L$ existieren, für den $h - g' \leq 0$ (damit R gewinnt). Dann ist aber $g < h \leq g'$, und deswegen g eine (durch g') dominierte Option in G, im Widerspruch zur Annahme.
- Falls der Zug aber zu $x - H$ führt, für ein $x \in g^R$, dann muß $x \leq H$ sein (L ist dran und soll verlieren). Damit ist aber $x \leq H \approx G$, also war g eine reversibel Option von G, im Widerspruch zur Annahme.

□

Aufgabe 167. *Beweise, daß* $\{0 \mid \uparrow\}$ *die Normalform von* $G = \{\uparrow \mid \uparrow\}$ *ist.*

Lösung. Die linke Option $\uparrow = \{0 \mid *\}$ von G hat die rechte Option $* = \{0 \mid 0\}$, und es ist $* \leq G$. Also darf man in G den linken $\uparrow$ durch die linken Optionen von $*$ ersetzen. Das ergibt $\{0 \mid \uparrow\}$.

Man muß nun noch verifizieren, daß das keine dominierten oder reversiblen Optionen enthält.

Aufgabe 168. *Beweise die* upstart equality $\{0 \mid \uparrow\} = \uparrow + \uparrow + *$

4.8 Schieben, Hüpfen, Schlagen

4.8.1 Kröten und Frösche (Toads and Frogs)

Gespielt wird auf einem $1 \times n$-Brett. Auf jedem Feld sitzt eine Kröte (T), oder ein Frosch (F), oder es ist leer (x).

Ein Spielzug für L ist, eine Kröte nach rechts zu bewegen, und zwar entweder durch Laufen (ein Schritt auf ein freies Nachbarfeld) oder Springen (über einen direkt benachbarten Frosch auf das direkt daneben liegende freie Feld). (Für R alles analog mit vertauschten Tieren und Richtungen.)

Das kann man als farbiges Term-(Wort-)Ersetzungssystem auffassen, das Alphabet ist $\{x, T, F\}$, die anwendbaren Regeln für L sind $\{Tx \to xT, TFx \to xFT\}$, die für R sind $\{xF \to Fx, xTF \to FTx\}$.

4.8.2 Konane

Man spiel auf Rechtecken mit Schachbrettfärbung. Zu Beginn liegt auf jedem weißen Feld ein weißer Stein, auf jedem schwarzen Feld ein schwarzer, und man entfernt beliebige zwei Steine verschiedener Farbe.

Ein Spielzug für L (Schwarz) ist: ein schwarzer Stein springt über einen Nord/Ost/Süd/West-benachbarten weißen Stein auf ein freies Feld, und schlägt dabei den übersprungenen Stein; für R (Weiß) analog.

Man kann nun noch vereinbaren, daß mehrere Sprünge (nacheinander und mit Abbiegen) in einem Spielzug erlaubt sind oder nicht.

Es gibt ernstzunehmende Berichte, nach denen dieses Spiel tatsächlich auf Hawaii populär war (lange vor Erfindung der kombinatorischen Spieltheorie).

4.8.3 Philosophen-Fußball (Phutball)

Gespielt auf einem Go-Brett (oder Teil davon), mit einem Ball (schwarz) und vielen Männern (weiß).

Wer dran ist, darf *entweder* einen Mann einsetzen (auf ein freies Feld) *oder* den Ball bewegen: der Ball überspringt einen oder mehrere Männer, die in einer der acht Himmelsrichtungen direkt nebeneinander stehen, und löscht diese dabei (sofort). Der Ball darf keine Lücken überspringen und nicht geschoben werden. Mehrere Sprünge direkt nacheinander (mit Abbiegen) in einem Zug sind erlaubt.

Das Ziel ist es, daß der Ball nach dem Spielzug auf (oder hinter) der gegnerischen Torlinie liegenbleibt. (Ein Berühren der Torlinie nur während eines Zuges zählt nicht als Tor.)

Man kann argumentieren, daß Phutball tatsächlich ein neutrales Spiel ist.

Konane und Phutball sind aussichtsreiche Kandidaten für den Programmierwettbewerb im Sommersemester.

4.9 Zahlen

Definition 169. *Ein Spiel G heißt* Zahl*,*

- *wenn alle Optionen G^L und G^R selbst Zahlen sind,*
- *und wenn $\nexists x \in G^L, y \in G^R$ gilt: $x \gtrsim y$.*

Wir kennen bis jetzt *ganze Zahlen.*

Aufgabe 170. *Verifiziere, daß die Spiele aus Definition 141 wirklich Zahlen sind (und die aus Definition 142 nicht).*

Nach Definition ist auch $G = \{1 \mid 3\}$ eine Zahl. Aber welche?

Beispiel 171. $\{1 \mid 3\} \approx 2$.

Proof. Wir zeigen $G \leq 2$ und $2 \leq G$:

$G \leq 2$, weil $G^L = 1 \ngeq 2$ und $2^R = \emptyset$.

$2 \leq G$, weil $2^L = 1 \ngeq G$ und $G^R = 3 \nleq 2$. Dabei ist $1 \ngeq G$, weil $G^R = 1 \leq 1$. □

Es gibt aber noch mehr Zahlen:

Beispiel 172. *Das Spiel $H := \{0 \mid 1\}$ ist eine Zahl.*

Verifiziere $H + H = 1$. Deswegen nennen wir $H = 1/2$.

Ebenso setzen wir $1/4 := \{0 \mid 1/2\}$. Wir können $1/4 + 1/4 - 1/2 = 0$ leicht verifizieren, wenn wir es als rot/blau-Hackenbush auffassen.

Satz 173. *Für jede Zahl x gilt $\forall x^L, x^R : x^L < x < x^R$.*

Proof. Wir zeigen $x^L < x$. Der Fall $x^L = x$ ist schon ausgeschlossen, also reicht $x^L \leq x$. Das ist der Fall, wenn kein $x^{LL} \geq x$ und kein $x^R \leq x^L$.

Falls $x^{LL} \geq x$, dann sogar $x^L > x^{LL} \geq x$, also erhalten wir den Widerspruch $x^L \geq x$.

Falls $x^R \leq x^L$, dann ist x gar keine Zahl. □

Satz 174. *Die Relation $\geq$ ist eine totale Ordnung auf Zahlen (das heißt: für beliebige zwei Zahlen gilt $x \geq y$ oder $y \geq x$).*

Proof. Falls $x \ngeq y$, dann existiert $x^L \geq y$ oder $y^R \leq x$. Weil x und y Zahlen sind, folgt $x > x^L \geq y$ oder $y < y^R \leq x$. □

Beispiel 175. *Es gilt* $\{1/4 \mid 1\} \approx 1/2$.

Wir können leicht $\{1/4 \mid 1\} \leq 1/2 = \{0 \mid 1\}$ und $\{1/4 \mid 1\} \geq 1/2$ nachrechnen.

Das ist ein Beispiel dafür, daß $x = \{x^L \mid x^R\}$ *nicht* das arithmetische Mittel von x^L und x^R ist. Der Wert x liegt zwar in diesem Intervall, aber er ist dadurch ausgezeichnet, daß er dort die *einfachste* (mit kleinstem Nenner) unter allen Zahlen der Form $k/2^n$ ist. Diese ist eindeutig bestimmt.

Satz 176. *Für jedes Spiel x und jede Zahl z gilt: wenn*

1. $x^L \ngtrsim z \ngtrsim x^R$,
2. *und keine Option z' von z erfüllt:* $x^L \ngtrsim z' \ngtrsim x^R$,

dann ist $x \approx z$.

(Wenn x sogar eine Zahl ist, dann steht dort wegen der Totalität der Ordung einfach $x^L < z < x^R$.)

Proof. TODO □

Aufgabe 177. *Bestimme den Wert X des Hackenbush-Spiels mit einem unendlich langen Grashalm, dessen Kanten abwechselnd (von unten) blau, rot, blau, rot, ... gefärbt sind.*

Beachte, daß das zwar ein unendlicher Graph ist, der aber doch immer nur endliche Spiele ergibt! (Egal, wo man anfängt, es gibt ab da immer nur noch endlich viele mögliche Spielzüge.)

Lösungsweg: Beweise für alle n: $(B\ R)^n < (B\ R)^{n+1} < X < (B\ R)^{n+1}B < (B\ R)^n B$. Das ist eine Intervallschachtelung, die eine reelle Zahl bestimmt. (In diesem Fall ist die Zahl sogar rational.)

Bemerkung 178. *Wir sehen, daß wir durch die Conwaysche Konstruktion von Zahlen als Spielen zwei Dinge auf einmal bekommen:*

- *die Cantorsche Definition der Ordinalzahlen*
- *den Dedekindschen Schnitt zur Definition reeller Zahlen*

und das alles mit einer zweizeiligen Definition (169)!

Das ist eine ganz erstaunliche Tatsache — vergleiche mit der Schulmathematik, wo wir von natürlichen über ganze Zahlen (als Äquivalenzklassen von Paaren von natürlichen Zahlen) zu rationalen Zahlen (als Brüche, also Äquivalenzklassen von Paaren von ganzen Zahlen) gehen und dann erst reelle Zahlen (als Äquivalenzklassen von Dedekindschen Schnitte von rationalen Zahlen) erhalten. Gibts hier alles auf einmal und praktisch umsonst!

4.10 Multiplikation, Division usw.

Definition 179. *Für Zahlen x, y setzen wir*

$$x \cdot y = \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$$

Das bedeutet natürlich $\{x'y + xy' + x'y' : x' \in x^L, y' \in y^L\} \ldots$

Zur Begründung beachten wir $(x - x^L)(y - y^L) > 0$, also $xy > xy^L + x^L y - x^L y^L$. Daraus folgt, daß tatsächlich wieder Zahlen entstehen.

Aufgabe 180. *Beweise, daß $0 \cdot x = 0$ und $1 \cdot x = x$ ist.*

Berechne $2 \cdot 1/2$, das heißt $\{1 \mid\} \cdot \{0 \mid 1\}$.

Wer sowas nicht mit Bleistift machen will, muß es programmieren.

Definition 181. *Für jede Zahl $0 < x$ definieren wir*

$$y = \left\{0, \frac{1 + (x^r - x)y^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} \mid \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R}\right\}.$$

Daß die definierte Größe (y) auf der rechten Seite vorkommt, ist so zu verstehen: wir beginnen mit einer Option $0 \in y^L$, und konstruieren daraus alle möglichen weiteren. Beispiel:

$x = 3 = \{2 \mid\}$. Dann ist $x^L - x = 2 - 3 = -1$ und wir erhalten $y = \{0, (1 - y^R)/2 \mid (1 - y^L)/2\}$.

Wir beginnen mit $y^L = 0$. Daraus entsteht $y = \{0, \ldots \mid 1/2. \ldots\}$, und daraus wiederum $\{0, 1/4, \ldots \mid 1/2, 3/8 \ldots\}$, und daraus $\{0, 1/4, 5/16, \ldots \mid 1/2, 3/8, 11/32, \ldots\}$, und das “sieht wirklich sehr nach 1/3 aus” (JHConway).

Satz 182. *Für das eben definierte y gilt $xy = 1$.*

Beweise das, oder

Aufgabe 183. *Verifiziere verschiedene “offensichtliche” Behauptungen, z. B. $2 \cdot (x/2) = x$.*

4.11 Große Zahlen

Wir finden, wie schon behauptet, die komplette Theorie der Ordinalzahlen (Ordnungstypen von wohlgeordneten Mengen) wieder.

Das umschließt auch unendliche Zahlen. Das einfachste Beispiel ist

$$\omega = \{0, 1, \ldots, |\}.$$

Diese Zahl ist echt größer als jede endliche Zahl.

Eine äquivalente Definition ist

$$\omega = \{0, 1 + \omega^L \,|\}.$$

Wieso ist $\omega - \omega = 0$? Es gibt einen einfachen spieltheoretischen Beweis. ω ist ein unendliches blaues Gras, und $-\omega$ ein unendliches rotes. Wer in der Summe anfängt, verliert.

Natürlich gibt es auch die Zahl

$$\omega + 1 = \{0, 1, \ldots, \omega \,|\}.$$

und viele weitere. Wenn wir die rechten Optionen immer leer lassen, entstehen genau die Cantorschen Ordinalzahlen.

Jetzt betrachten wir aber $x = \{0, 1, \ldots \mid \omega\}$. Für jede endliche Zahl n gilt $n < x < \omega$ (Beweise!).

Wir bilden $y = x + 1 = \{0, 1, \ldots, x \mid \omega + 1\}$. Es gilt $y = \omega$ (Beweise!) Also ist $x = \omega - 1$. (Das ist natürlich *keine* Ordinalzahl.)

Weiter gehts mit $\omega - 2, \omega - 3, \ldots,$

$$\omega - n = \{0, 1, \ldots \mid \omega, \omega - 1, \omega - (n-1)\}.$$

So können wir auch

$$z = \{0, 1, \ldots \mid \omega, \omega - 1, \ldots\}$$

konstruieren.

Aufgabe 184. *Zeige* $z = \omega/2$, *d. h.* $z + z = \omega$.

4.12 Rechnen mit Nimbers

Die Nim-Addition kennen wir ja schon. Wiederholung:

$x \oplus y = \text{mex}\{x' \oplus y, x \oplus y' \mid x' < x, y' < y\}$.

Die Multiplikation für Spiele, eingeschränkt auf Nimbers, ergibt

Definition 185. $x \odot y = \text{mex}\{x' \odot y \oplus x \odot y' \ominus x' \odot y' \mid x' < x, y' < y\}$.

(Natürlich ist $\ominus = \oplus$, aber so sieht es besser aus.)

Satz 186. $0 \odot y = 0$

Proof. Offensichtlich, da 0 gar keine Optionen ($x' < x = 0$) besitzt. □

Satz 187. $1 \odot y = y$

Proof. $1 \odot y = \text{mex}\{0 \odot y \oplus 1 \odot y' \ominus 0 \odot y' \mid y' < y\} = \text{mex}\{0 \oplus y' \ominus 0 \mid y' < y\} = \text{mex}\{y' \mid y' < y\} = y$. □

Beispiel 188. $2 \odot 2 = 3$.

Proof. $2 \odot 2 = \text{mex}\{x' \odot y \oplus x \odot y' \ominus x' \odot y' \mid x', y' \in \{0, 1\}\} = \text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$. □

Aufgabe 189. *Berechne die ersten Einträge der Nim-Multiplikations-Tabelle!*

Aufgabe 190. $2^{2^n} \odot 2^{2^n} = (3/2)2^{2^{n+1}}$.

Auch bei den Nimbers gibt es ein ω, und zwar $\omega = \{0, 1, \ldots, \}$. (Das ist ein unendlich langer grüner Nim-String.)

Satz 191. $\omega^3 = 2$.

Proof. Da *keine endliche* Zahl n die Eigenschaft $n \odot n \odot n = 2$ besitzt, ist ω die kleinste Zahl, die als $\sqrt[3]{2}$ in Frage kommt. Und genau deswegen *muß* sie auch die Lösung sein (mex-Prinzip). □