CF1) Wir fixieren $\Sigma = \{a, b\}$ und definieren die Höhe $h(w)$ von $w \in \Sigma^*$ durch

$$h(w) = |w|_a - |w|_b.$$

Wir schreiben $u < w$, falls $u \in \Sigma^*$ ein echter Präfix von $w \in \Sigma^*$ ist:

$$u < w \iff \exists v \in \Sigma^* : v \neq \lambda \wedge u \cdot v = w.$$

Damit definieren wir die Sprache K durch

$$K = \{w : h(w) = -1 \wedge \forall u < w : h(u) \geq 0\}.$$

Wir betrachten auch die kontextfreie Grammatik G mit Startsymbol S und Regeln

$$\{S \to aSS, S \to b\}.$$

Beweisen Sie, daß $L(G) = K$. Vervollständigen Sie diesen Ansatz:

Teil a: $L(G) \subseteq K$. Durch Induktion über die Länge n einer Ableitung folgt $\forall w : S \to_G^n w \Rightarrow w \in K$.

Induktionsanfang: ... | 1 P. |

Induktionsschritt: Falls $S \to_G^{n+1} w$, dann muß die Ableitung so aussehen: $S \to aSS \to^n w$ und es gibt Wörter $u, v \in L(G)$ und Zahlen $i, k \leq n$ mit $S \to^i u, S \to^k v$ und $a \cdot u \cdot v = w$. Deswegen gilt für u und v die Induktionsbehauptung.

Berechnen Sie unter diesen Voraussetzungen $h(w)$ sowie für *jede* mögliche Wahl eines $p < w$ die Größe $h(p)$, und leiten Sie $w \in K$ ab. | 3 P. |

Teil b: $K \subseteq L(G)$. Wir zeigen durch Induktion nach $|w|$, daß es für jedes $w \in K$ wenigstens eine Ableitung $S \to_G^* w$ gibt.

Induktionsanfang: ... | 1 P. |

Induktionsschritt: Beweisen Sie diesen Hilfssatz: jedes Wort $w \in K$ mit $|w| > 1$ besitzt eine Zerlegung $w = p \cdot q$, für die $a < p$ und $h(p) = 0$ gilt, und konstruieren Sie daraus die geforderte Ableitung. | 2 P. |

---

ab hier `autotool`-Aufgaben

Bestimmen Sie für die Sprache $K^R = \{w^R : w \in K\}$ (die Menge aller Spiegelbilder von Wörtern aus K) eine kontextfreie Grammatik

CF2a) in Chomsky-Normalform, CF2b) in Greibach-Normalform. | 2 P. |

Für $\Sigma = \{0, 1\}$ und $k \geq 2$ definieren wir die Sprachen Q_k aller Wörter, die keine k-ten Potenzen sind, durch

$$Q_k = \Sigma^* \setminus \{w^k : w \in \Sigma^*\}.$$

CF3a) Finden Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache Q_2. | 1 P. |

---

ab hier `autotool`-Zusatzaufgaben (ohne Wertung, aber mit Highscores)

CF3b) ...für die Sprache Q_3.

CF4) Finden Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$\Sigma^* \setminus \{\mathsf{bin}(1)\sharp\mathsf{bin}(2)\sharp\ldots\mathsf{bin}(n)\sharp : n \geq 1\},$$

wobei $\Sigma = \{0, 1, \sharp\}$ und $\mathsf{bin}(k)$ die Binärdarstellung der Zahl k ist.