(Seminar 24. Juni) (Herbrand-)Modelle, Äquivalenzrelationen

1 Motivation

(Kommt noch genauer in der Vorlesung.)

Gegeben eine Menge von prädikatenlogischen Aussagen über einer Signatur (F, A). Wie finden wir ein Modell? Wir brauchen das Universum U und die Interpretationen der Symbole.

Ein passendes Universum bekommen wir ganz umsonst: Wir U = Menge der variablenfreien Terme über F (Funktionssymbole) und interpretieren die Funktionssymbole durch sich selbst. Das U heißt Herbrand-Universum zu F.

Um ein Modell zu finden, müssen wir „nur noch" die passenden Interpretationen der Prädikatsymbole in diesem U suchen.

2 Beispiel f. Herbrand-Universum

Signatur: a, b (einstellig), e (nullstellig).

Terme sind $a(b(e)), b(b(b(a(e))))$ usw.

Das ist isomorph zu $\{a, b\}^*$.

3 Bemerkung über Modellgrößen

Der Vorteil der Konstruktion ist, daß so ein U abzählbar ist.

Für Logik erster Stufe gilt: wenn eine Formel ein Modell hat, dann sogar ein abzählbares. Bei zweiter Stufe hätten wir z. B. auch Mengen, aber die Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge ist nicht mehr abzählbar. Das heißt: wir können keine Formel erster Stufe aufschreiben, die ausdrückt: M ist abzählbar.

Vergleiche mit Aufgabe 93: das war eine Formel für: M ist unendlich. Sowas geht also.

4 Äquivalenzklassen in Herbrand-Universen

Kann aber passieren, daß zwei verschiedene Terme s, t doch das gleiche Element $u \in U$ bezeichnen. Wir sagen $s \sim t$. Das ist eine Äquivalenzrelation. Die bestimmt eine Klasseneinteilung von U. Wir nehmen das neue Universum $U' = U/\sim$. Wenn möglich, stellen wir jede Klasse durch eine in ihr enthaltene Normalform dar.

Beispiele:

1. Signatur wie eben, und Aussage

   $$\forall x : b(x) = x$$

   Also $\mathsf{Wert}(a(b(e))) = \mathsf{Wert}(a(e)), \mathsf{Wert}(b(b(b(a(e))))) = \mathsf{Wert}(a(e))$. Anders gesagt $ab \sim a \sim bbba$.

   Das heißt $s \sim t$ gdw. gleichviele a in s und t.

   Normalformen: a^*.

   Daraus folgt $U/\sim \cong \{a\}^* \cong \mathbb{N}$.

2. Signatur wie eben, und Aussage

   $$\forall x : b(a(x)) = a(b(x))$$

   Das heißt, wir können Bubblesortieren: $bbba \sim bbab \sim babb \sim abbb$.

   Es gilt $s \sim t$ gdw. Anzahl der a und b übereinstimmt.

   Normalformen: a^*b^* (andersrum geht auch, aber nicht gleichzeitig).

   Also $U/\sim \cong \{a\}^* \times \{b\}^* \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   So ähnlich geht Aufgabe 10*.

3. $\forall x : a(b(x)) = a(x)$ (selber ausrechnen)

4. $\forall x : a(b(b(x)) = x$ (selber ausrechnen)

Bemerkung: hier gab es nur Funktionssymbole und die Relation $=$, die auch wirklich die Identität sein soll.

Das hat sehr viel mit Termersetzungssystemen zu tun (siehe Vorlesung im Hauptstudium).