# 1 Metriken

## 1.1 Axiome

Def. eine Metrik auf $M$ ist eine Funktion: $\mathsf{dist} : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\mathsf{dist}(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y \qquad \mathsf{dist}(x,y) = \mathsf{dist}(y,x)$$
$$\mathsf{dist}(x,z) \leq \mathsf{dist}(x,y) + \mathsf{dist}(y,z)$$

Def. $\mathsf{Kugel}(x,\delta) := \{y \mid \mathsf{dist}(x,y) < \delta\}$.

## 1.2 Beispiele

Bsp. Metrik auf $\mathbb{R}^1$: $\mathsf{dist}(x,y) = |x-y|$

euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$: $\mathsf{dist}(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

Manhattan-Metrik auf $\mathbb{R}^2$: $\mathsf{dist}(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

Das sind also zwei Algebren, die Modelle der Aussagenmenge (Metrik-Axiome) sind. Bei beiden stimmt das Universum ($\mathbb{R}^2$) überein, sie unterscheiden sich nur in der Interpretation des Funktionssymbols $\mathsf{dist}$.

## 1.3 Metrik auf Wörtern

Def. $\mathsf{dist}(u,w) :=$ falls $u = w$, dann 0, ansonsten $2^{-k}$ wobei $k = \max\{i \mid u[1..i] = w[1..i]\}$ (die Länge des längsten gemeinsamen Präfixes).

Überprüfe die Axiome (Beispiele f. Dreiecksungleichung, Beweis)

das ist sogar Ultrametrik:

$$\mathsf{dist}(x,z) \leq \max\{\mathsf{dist}(x,y), \mathsf{dist}(y,z)\}$$

Wie sehen Kugeln aus? Was ist $\mathsf{Kugel}(acaba, 0.2)$? (Antwort: $aca\Sigma^*$).

In einer Ultrametrik gilt: Für $0 < d < e$: Jede $d$-Kugel liegt *ganz* innerhalb oder *ganz außerhalb* jeder $e$-Kugel.

Schreibe das als prädikatenlogische Aussage! Beweise!

Male dazu ein Bild! Warum ist das schwer? Weil die euklidische Metrik keine Ultrametrik ist.