(Vorlesung vom 1. 6. 99)
Einführung in die Prädikatenlogik

1 Motivation

bisher Aussagenlogik: logische Verknüpfungen von Ausssagen.

Elementaraussagen: das Wahre, das Falsche.

jetzt Prädikatenlogik: neue Elementaraussagen: Prädikate.

Prädikat: Aussage über Dinge (Beziehungen zwischen Dingen) eines Universums.

2 Universum

2.1 Syntax

Def. B heißt *semiotische Basis (Signatur)* gdw. $B = (F, A)$ mit

- F ist eine *Funktionen-Signatur*:
  eine Liste von Mengen von Funktionssymbolen $F = (F_0, \dots, F_m)$,
  Bedeutung: in F_k sind die k-stelligen Funktionssymbole,

- A ist eine *Relationen- (Attribut-, Prädikat-)Signatur*:
  eine Liste von Mengen von Relationssymbolen $A = (A_0, \dots, A_n)$,
  Bedeutung: in A_k sind die k-stelligen Relationssymbole.

Bsp 2. $F = (\{1\}, \{s\}), A = (\emptyset, \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}, \{<\})$.

Bem. die Symbole in F_0 heißen Konstanten.

Bem. die Symbole in A_0 entsprechen Wahrheitswerten, die in A_1 Mengen.

2.2 Semantik

Def. Wenn $B = (F, A)$ eine semiotische Basis (Signatur) ist, dann heißt $H = (U, h)$ eine B-*Algebra*, wenn

- U eine nichtleere Menge ist (heißt *Universum*) und

- h eine Funktion, die

  - jedem $f \in F_k$ eine k-stellige Funktion $f_h : U^k \to U$ und
  - jedem $a \in A_k$ eine k-stellige Relation $a_h \subseteq U^k$ zuordnet.

2.3 Beispiel: First Order Logic auf Wörtern

Wir bezeichnen $\Sigma = \{1, \dots, k\}$. Zu jedem Wort $w \in \Sigma^+$ (oder Σ^*, dann aber vorsichtig, siehe unten) definieren wir eine Algebra $H_w = (U, h)$ zu obiger Signatur wie folgt:

- $U = \{1, \dots, |w|\}$
  (d. h. das Universum sind die (Nummern der) Positionen im Wort w)
- $h(<) =$ die übliche Relation $<$ auf den Zahlen in U
  (d. h. $p < q$ gdw. p eine Position links von q ist)
- $h(1) = 1$ (die Position ganz links)
- $h(s) =$ die Funktion $p \mapsto p + 1$
  (d. h. jede Position auf ihren rechten Nachbarn)
  mit der Festlegung $|w| \mapsto |w|$ (damit wir das Universum nicht verlassen)
- $h(Q_i) = \{p \mid w_p = i\}$
  (d. h. $Q_i(p)$ ist wahr gdw. an Position p in w der Buchstabe i steht)

Vorsicht: zum leeren Wort ϵ gehört die leere Positionsmenge (weil es in ϵ keine Positionen gibt). Ein Universum muß aber nichtleer sein.

Ausweg: entweder betrachten wir nur Sprachen über Σ^+ oder (besser) wir schreiben hinter jedes Wort ein Schlußsymbol S, das sonst nicht im Alphabet vorkommt. (Das heißt, ϵ wird durch S kodiert und hat damit einen Buchstaben.)

Das hat den Vorteil, daß wir mit $Q_S(s(p))$ sehr einfach testen können, ob das Wort genau die Länge p hat. Das geht sonst auch, aber umständlich: wir fragen $p = s(p)$.

3 Terme, Variablen, Belegungen

3.1 Syntax

Def. $\underline{\mathsf{Var}} = \{v_1, v_2, \ldots\}$ ist eine abzählbare Menge von *Variablen.*

Def. Sei F eine Funktionen-Signatur. Ein *Term* besteht aus Funktionssymbolen aus F und Variablen aus $\underline{\mathsf{Var}}$. Die Funktionssymbole müssen die passende Argumentzahl haben. Die Variablen haben keine Argumente. Die Menge aller dieser Terme heißt $\underline{\mathsf{Term}}(F, \underline{\mathsf{Var}})$.

Es gibt auch Funktionssymbole ohne Argumente (nämlich die nullstelligen).

Andere Symbole (z. B. Relationen) kommen nicht in Termen vor!

Natürlich kommen doch andere Zeichen vor (Klammern und Kommata), aber davon abstrahieren wir großzügig, und stellen uns den Term als Baum vor.

In der Wurzel des Baums steht das Haupverknüfungszeichen.

Bsp (Forts.) $s(s(s(1)))$ ist ein Term. $s(p)$ ist ein Term.

3.2 Semantik

Sei $B = (F, A)$ eine Signatur und $H = (U, h)$ eine B-Algebra.

Def. Eine *Belegung* ist eine Abbildung $\underline{\mathsf{Var}} \to U$ (jeder Variablen wird ein Ding aus dem Universum zugeordnet).

Def. Jede Belegung von Variablen $\underline{\mathsf{Var}} \to U$ kann ausgedehnt werden zu einer *Bewertung* von Termen $\underline{\mathsf{Term}}(F, \underline{\mathsf{Var}}) \to U$ (jedem Term wird ein Ding aus dem Universum zugeordnet).

Wir schreiben $\mathsf{Wert}_H(t, b)$ für den Wert des Terms t unter der Belegung b in der Algebra H. Wir lassen H weg, wenn es klar ist.

Bsp. (Forsetzung): Die Belegung b ist $b(z) = 2$.
Das Universum H ist das zum Wort $w = 321121$ gehörende.
Dann ist $\mathsf{Wert}_H(s(z), b) = 3$.

(Achtung: w haben wir dazu gar nicht gebraucht. Ist ja nicht verboten.)

4 Elementarausdrücke

4.1 Syntax

Def. Ein prädikatenlogischer *Elementarausdruck* ist ein Ausdruck der Form $a(t_1, \dots, t_k)$ mit

- $a \in A_k$ (a ist ein Relationssymbol mit k Stellen)
- für alle i: $t_i \in \underline{\mathsf{Term}}(F, \underline{\mathsf{Var}})$
  (jedes Argument des Relationssymbols ist ein Term)

Bsp. (Forts.) $Q_2(s(z))$ ist ein Elementarausdruck.

4.2 Semantik

Def. Der *Wert eines Elementarausdrucks* $e = a(t_1, \dots, t_k)$ unter einer Belegung b in einer Algebra $H = (U, h)$ heißt $\mathsf{Wert}_H(e, b)$ und ist

$$(\mathsf{Wert}_H(t_1, b), \dots, \mathsf{Wert}_H(t_k, b)) \;\in\; h(a)$$

Bem. Das heißt: a ist ein Relationssymbol. $h(a)$ ist dessen Interpretation (d. h. eine Relation). Wir sehen nach, ob das Tupel der Werte in $h(a)$ enthalten ist.

Bem. Der Wert ist also wahr oder falsch. Wir verlassen das Universum und gelangen zu Wahrheitswerten.

Bsp. (Forts.) Die Belegung b ist $b(z) = 2$.
Das Universum H ist das zum Wort $w = 321121$ gehörende.
$\mathsf{Wert}_H(Q_2(s(z)), b) = \mathsf{False}$ (weil auf Position 3 keine 2 steht).

5 Ausdrücke

5.1 Syntax

Def. Die Menge Aus der prädikatenlogischen *Ausdrücke* ist die kleinste Menge M, für die gilt:

- Elementarausdrücke $\subseteq M$
- (logische Operationen:) wenn $F, G \in M$,
  dann $\neg F, F \vee G, F \wedge G, F \leftrightarrow G, F \rightarrow G \in M$
  (mit nötigen Klammern, siehe oben, wir denken an Bäume)
- (Quantoren:) wenn $F \in M$ und $v \in$ Var

  jetzt kommt eine Bedingung, die erst später definiert und erklärt wird, für die heutige Vorlesung brauchen wir das nicht:
  und v kommt in F vollfrei vor,

  dann $\exists v F \in M, \forall v F \in M$.

Bsp. $\exists q : p < q \wedge Q_3(q)$ ist Ausdruck.

Def. Jedes Vorkommen von $v \in$ Var in $\forall v F$ und $\exists v F$ heißt *gebunden*. Jedes andere Vorkommen von v heißt *frei*.

Def. Ein Ausdruck heißt *Aussage*, wenn in ihm keine Variablen frei vorkommen.

Bsp. $\forall p : Q_1(p) \rightarrow \exists q : p < q \wedge Q_3(q)$ ist Aussage.

Bsp. $<$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, total läßt sich als Aussage aufschreiben.

5.2 Semantik

Def. Der Wert eines Ausdrucks E unter einer Belegung b in der Algebra H heißt $\mathsf{Wert}_H(E, b)$ und ist erklärt durch:

- E ist Elementarausdruck: wie bereits definiert
- E ist logische Verknüpfung: entsprechende Verknüpfung der Werte der Teilausdrücke
- $E = \exists v F$ hat den Wert True, gdw es eine Belegung b' gibt mit
  - (b' unterscheidet sich von b höchstens an der Stelle v:) $\forall w \neq v : b(w) = b'(w)$
  - $\mathsf{Wert}_H(F, b') = \mathsf{True}$.
- $E = \forall v F$ hat den Wert True, gdw für alle Belegungen b' mit
  - (b' unterscheidet sich von b höchstens an der Stelle v:) $\forall w \neq v : b(w) = b'(w)$

  gilt:

  - $\mathsf{Wert}_H(F, b') = \mathsf{True}$.

Bsp. $w = 12211323, b : p \mapsto 2$, $\mathsf{Wert}_{H_w}(\exists q : p < q \wedge Q_3(q), b) = \mathsf{True}$

Bsp. $\mathsf{Wert}_{H_w}(\forall p : Q_1(p) \to \exists q : p < q \wedge Q_3(q), ?) = \mathsf{True}$.

Bem. Da eine Aussage keine freien Variablen hat, hängt ihr Wert nicht von Belegungen ab. In einer fixierten Algebra ist jede Aussage entweder wahr oder falsch.

Bei Übergang zu einer anderen Algebra (über der gleichen Signatur) kann sich der Wahrheitswert der Aussagen ändern.

Bsp. $\mathsf{Wert}_{332211}(\forall p : Q_1(p) \to \exists q : p < q \wedge Q_3(q), ?) = \mathsf{False}$).

D. h. einerseits: mit bestimmten Aussagen können wir Algebren voneinander unterscheiden.

D. h. andererseits: allgemeingültige Aussagen sollen in allen Algebren gelten.

Bsp. $\neg\forall x : p(x) \leftrightarrow \exists x : \neg p(x)$

Allgemeingültigkeit usw. wird in späterer Vorlesung behandelt.