1 Das Burnside-Problem

W. Burnside fragte 1902:

> Wie sehen Gruppen aus, die durch m Generatoren erzeugt werden und in denen gilt: $\forall x : x^n = 1$?
>
> Insbesondere: sind die alle endlich?

Für $m = 1$ sind das zyklische Gruppen der Ordnung n, also endlich. Für $m > 1$ wirds interessant, $m = 2$ ist schon schwer genug.

2 Einfach: $n = 2$

Falls $n = 2$, dann sind die Gruppen kommutativ (Aufgabe 103). Argument: $xy = xyxx = xyxyyx = yx$. Wir können also doppelt erscheinende Generatoren streichen und den Rest sortieren. Daraus folgt leicht, daß die Gruppen endlich sind und 2^n Elemente haben.

3 Schwerer: $n = 3$

Die Zusatzaufgabe war $n = 3$. Das war das Resultat von Burnside: solche sind auch endlich.

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall mit nur zwei Generatoren a und b.

Dann gilt zum Beispiel $b^2ab^2 = a^2ba^2$. Beweis: multipliziere beides von rechts mit ab^2a.

Übung: Wir können jedes Gruppenelement eindeutig darstellen als $(ab^2)^x(b^2a)^yb^z$ mit $0 \leq x, y, z \leq 2$. Das heißt, die Gruppe hat 3^3 Elemente.

Übung: in dieser Kodierung ist die Gruppenoperation:

$$\begin{aligned}(x, y, z) \circ a &= (x + 1 + z, y - z, z + 1) \pmod 3\\ (x, y, z) \circ b &= (x, y, z + 1) \pmod 3\\ (x, y, z) \circ (a, b, c) &= (x + a + (a + b)z, y + b - (a + b)z, z + c) \pmod 3\end{aligned}$$

Daraus sehen wir auch, daß das für $z = c = 0$ kommutiert: die von ab^2 und b^2a erzeugt Untergruppe ist kommutativ.

Durch die Kodierung haben wir das Wortproblem entschieden und die Endlichkeit der Gruppe gezeigt. Das hätten wir gern auf andere Burnside-Gruppen übertragen.

Im Fall $m = 3$ (drei Generatoren), $n = 3$ sollte so ähnlich gehen. Die Gruppe hat aber schon 3^7 Elemente.

4 Im Allgemeinen

Es gibt einige Resultate aus den letzten 10, 20 Jahren:

1.) Es gibt eine Zahl N (etwa 1000), so daß für alle $n \geq N$ unendliche Burnside-Gruppen existieren.

2.) Es gibt eine Funktion $f(m,n)$ mit: Wenn G eine Burnside-Gruppe zu (m,n) ist, dann ist $|G| \leq f(m,n)$ oder $|G| = \infty$. Das sind aber astronomische Schranken im Sinne von

$$f(m,n) = \underbrace{m^{m^{m^{\cdots m}}}}_{n^{n^n}}$$

.

5 Offene Fragen

Obwohl es diese Schranken gibt, ist **für kleine n unbekannt,** ob es unendliche Burnside-Gruppen gibt. Bewiesen ist nur: für $n = 2, 3, 4, 6$ nicht. Der erste ungelöste Fall ist also $n = 5$.

Aber Vorsicht: für sehr tiefe algebraische Arbeiten an Burnside-Problemen hat Efim Zelmanov 1994 die Fields-Medaille erhalten, das entspricht etwas dem Nobelpreis der Mathematiker.

Trotzdem könnte man mit String-Rewriting-Methoden vielleicht etwas erreichen.

Wer da etwas probieren möchte, kann das gern als Projektthema (zum Programmieren und/oder Denken, aber ganz ohne dieses gehts nicht) mit mir (J. Waldmann) vereinbaren.