Aufgabenblatt 5

51 (Douglas Hofstadters MU-Rätsel) Wir betrachten Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{A, B\}$, das Axiom A und diese Ableitungsregeln:

1. an ein Wort, das auf A endet, ein B anhängen: $wA \to wAB$
2. ein Wort verdoppeln: $w \to ww$
3. drei A durch ein B ersetzen: $uAAAw \to uBw$
4. zwei B löschen: $uBBw \to uw$

Beispiel: $A \to_2 AA \to_2 AAAA \to_1 AAAAB \to_3 ABB \to_2 ABBABB \to_4 AABB$.

Kann man B ableiten? Kann man $ABBB$ ableiten? (1 Punkt)

Für $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ bezeichnet $c_x(w)$ die Anzahl der x in w. Vervollständigen und beweisen Sie: (2 Punkte)

Wenn das Wort w ableitbar ist, dann gilt $c_{\boxed{?}}(w) \not\equiv \boxed{?} \pmod{\boxed{?}}$.

Gilt auch die Umkehrung, d. h. ist jedes Wort w ableitbar, das diese Restklassenbedingung erfüllt? (3 Punkte)

---

52) (Türme von Hanoi) Für das Alphabet $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die Ableitungsrelation auf Σ^*:

$$uxw \to uyw \iff u \in \Sigma^*, x, y \in \Sigma, w \in (\Sigma \setminus \{x, y\})^*$$

Beispiel: $23211 \to 23311$ wegen $u = 23, x = 2, y = 3, w = 11$.

Zeigen Sie eine Ableitung von 321 aus 111. (1 Punkt)

Beweisen Sie: für alle $n > 0$ und für alle Wörter $u, w \in \Sigma^n$ gilt: w ist aus u ableitbar. (Induktion nach n.) (2 Punkte)

Zusatz (Vorsicht, nicht einfach): Für beliebige $\Sigma = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und $k > 0$: wie lang ist die kürzeste Ableitung von 1^k nach n^k?