Aufgabenblatt 9

91) A ist ein Ausdruck, der x vollfrei enthält, und t ein Term, der keine Variablen enthält, die in A gebunden sind. $A[x/t]$ ist das Resultat der Ersetzung aller x in A durch t.

Man zeige, daß für alle solche A, x, t folgende Ausdrücke allgemeingültig sind:

(a) $(\forall x : A) \rightarrow A[x/t]$ (2 Punkte)

(b) $A[x/t] \rightarrow (\exists x : A)$ (2 Punkte)

Zeigen Sie an je einem Beispiel, daß die an t gestellte Bedingung notwendig ist. (2 Punkte)

---

92) Gibt es einen Ausdruck A und eine zu dessen Signatur passende Algebra B, die weder Modell von A noch von $\neg A$ ist? (2 Punkte)

Hinweis: So ein B gibt es nicht, wenn A eine Aussage ist.

---

93) Finden Sie ein Modell für die Aussage (1 Punkt)

$$\forall x : \neg R(x, x) \wedge \forall x : \exists y : R(x, y) \wedge \forall x, y, z : R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)$$

und zeigen Sie, daß sie nur unendliche Modelle hat. (3 Punkte)

Der Beweis beginnt so: Angenommen, wir haben ein Modell (I, f) mit endlichem Universum $I = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann ...