Aufgabenblatt 7

Wir betrachten die Signatur mit den Funktionssymbolen 1 (nullstellig), s (einstellig) und den Prädikätsymbolen $Q_1, \ldots, Q_k$ (einstellig), $<$ (zweistellig). Wir bezeichnen $\Sigma = \{1, \ldots, k\}$.

Zu jedem Wort $w \in \Sigma^*$ definieren wir eine Algebra $H_w = (U, h)$ zu obiger Signatur wie folgt:

- $U = \{1, \ldots, |w|\}$
  (d. h. das Universum sind die (Nummern der) Positionen im Wort w)
- $h(<) =$ die übliche Relation $<$ auf den Zahlen in U
  (d. h. $p < q$ gdw. p eine Position links von q ist)
- $h(1) = 1$ (die Position ganz links)
- $h(s) =$ die Funktion $p \mapsto p + 1$
  (d. h. jede Position auf ihren rechten Nachbarn)
  mit der Festlegung $|w| \mapsto |w|$ (damit wir das Universum nicht verlassen)
- $h(Q_i) = \{p \mid w_p = i\}$
  (d. h. $Q_i(p)$ ist wahr gdw. an Position p in w der Buchstabe i steht)

Beispiel: Die Algebra zum Wort 12211323 *erfüllt* die Formel

$$(\mathbf{A}) \qquad \forall p : Q_1(p) \to \exists q : p < q \wedge Q_3(q)$$

(rechts von jeder 1 kommt (irgendwann) noch eine 3),
aber *nicht* die Formel

$$(\mathbf{B}) \qquad \exists p : \exists q : p < q \wedge Q_3(p) \wedge Q_1(q)$$

(es gibt eine 3 links von einer 1)

Gegeben ist die Formel

$$F = \exists p : (Q_1(p) \wedge \forall q : (Q_2(q) \rightarrow p < q))$$

71) Finden Sie je ein Wort über $\Sigma = \{1, 2, 3\}$, dessen Algebra F erfüllt bzw. nicht erfüllt. Begründen Sie (kurz). (2 Punkte)

72) Beschreiben Sie die Menge aller Wörter über Σ, deren Algebra F erfüllt, verbal (kurz!) (2 Punkte)

73) Finden Sie einen regulären Ausdrück für diese Menge. (2 Punkte)

Gegeben ist der reguläre Ausdruck

$$E = \Sigma^* aa \Sigma^* \cup \Sigma^* bb \Sigma^*$$

74) Geben Sie je ein Wort an, das in (bzw. nicht in) der von E erzeugten Sprache liegt. (1 Punkt)

75) Beschreiben Sie verbal die von E erzeugte Sprache. (1 Punkt)

76) Finden Sie eine prädikatenlogische Formel G, welche genau die von E erzeugt Sprache beschreibt. (4 Punkte)