Aufgabenblatt 3

25) (von Aufgabenblatt 2) (2 Punkte)

---

34) Die Funktion $\mathsf{dual} : \underline{\mathsf{Aus}} \to \underline{\mathsf{Aus}}$ ersetzt alle $\vee$ durch $\wedge$ und umgekehrt. Gilt die Behauptung $\mathsf{ag}((G \to H) \to (\mathsf{dual}(H) \to \mathsf{dual}(G)))$?

Falls ja: Geben Sie ein Beispiel an (1 Punkt)
und einen Beweis. (3 Punkte)

Falls nein: Geben Sie ein Gegenbeispiel an, (1 Punkt)
korrigieren Sie die Behauptung, (1 Punkt)
und beweisen Sie diese. (2 Punkte)

---

35) Finden Sie je eine monotone und nicht monotone dreistellige Boolesche Funktion. (1 Punkt)

Wir ordnen Bool durch $\mathsf{False} < \mathsf{True}$. Ein Funktion $f : \mathsf{Bool}^n \to \mathsf{Bool}$ heißt *monoton*, falls

$$\begin{aligned}&\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathsf{Bool} :\\ &\quad \text{wenn } \forall k : x_k \leq y_k, \text{ dann } f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

36) Beweisen Sie: Wenn f nicht monoton ist,
läßt sich $\neg : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$ in $\{\mathsf{False}, \mathsf{True}, f\}$ darstellen. (2 Punkte)

Finden Sie eine solche Darstellung für Ihr Beispiel aus Aufgabe 35. (1 Punkt)

---

37) Die Länge $|N|$ einer konjunktiven oder alternativen Normalform ist die Anzahl ihrer Literale. Beispiel: $|\neg x_1 \vee x_2| = 2$.

Wir bezeichnen mit $\mathsf{KNF}(H)$ (bzw. $\mathsf{ANF}(H)$) die Menge der konjunktiven (bzw. alternativen) Normalformen des Ausdrucks H.

Wir messen (nur für diese Aufgabe) die Schwierigkeit einer Formel H durch die Funktion $S(H) = \min\{|N| \mid N \in \mathsf{KNF}(H) \cup \mathsf{ANF}(H)\}$.

Bestimmen Sie $S(H)$ für

$$H = ((\neg c \wedge d) \to (a \vee \neg b)) \wedge (a \to (c \vee d)) \wedge (\neg a \to (\neg b \wedge c \wedge d))$$

(2 Punkte)

Zusatz: Finden Sie eine Formel H' mit vier Variablen, für die $S(H')$ möglichst groß wird.