Aufgabenblatt 10

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ enthält die Signatur B_n die Funktionssymbole e (nullstellig), $1, \ldots, n, \overline{1}, \ldots, \overline{n}$ (einstellig) und $\circ$ (zweistellig). Die Formelmenge M_1 besteht aus der Aussage $\forall x : e \circ x = x$ sowie, für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, den Aussagen

$$\forall x, y : \quad k(x) \circ y = k(x \circ y) \ \wedge \ \overline{k}(x) \circ y = \overline{k}(x \circ y)$$

Wir betrachten nur Strukturen, in denen (1) das Relationssymbol = durch die tatsächliche Identität im Universum interpretiert wird und (2) jedes Element des Universums die Interpretation eines variablenfreien Terms ist. (Das heißt, wir können All-Aussagen durch Induktion über den Termaufbau beweisen.)

---

101) Zeigen Sie $M_1 \models$ ($\circ$ ist assoziativ). (2 Punkte)

---

102) Die Formelmenge M_2 besteht aus M_1 und, für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, den Aussagen

$$\forall x : \quad k(\overline{k}(x)) = x \ \wedge \ \overline{k}(k(x)) = x$$

Zeigen Sie $M_2 \models (\forall x : \exists y : x \circ y = e)$ (2 Punkte)

Finden Sie ein solches y für $x = 1(\overline{3}(2(e)))$! (1 Punkt)

---

103) Die Menge M_3 enthält M_2 und die Aussage $\forall x : x \circ x = e$.

Zeigen Sie $M_3 \models$ ($\circ$ ist kommutativ). (2 Punkte)

Zeigen Sie: jedes Modell von M_3 ist endlich. (3 Punkte)

Finden Sie ein Modell für $n = 3$. (2 Punkte)

Zusatz: untersuche 103) für

$$M_3' = M_2 \cup \{\forall x : x \circ x \circ x = e\}$$