Kapitel 2

Voraussetzungen

2.1 Mengen, Relationen, Funktionen

Wir vereinbaren ein paar Schreibweisen. Ihre Bedeutung sollte aus anderen Vorlesungen bekannt sein.

2.1.1 Mengen

Def. Die Menge der natürlichen (ganzen) Zahlen heißt $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$).

Def. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M heißt $|M|$.

Def. Für Mengen A, B bedeutet A^B die Menge aller Abbildungen von B nach A.

Def. Wenn nötig, bedeutet jede natürliche Zahl n die Menge

$$\{m \mid 0 \leq m < n\},$$

d. h. n ist eine n-elementige Menge.

Def. Wir identifizieren 2^B (Abbildungen $B \to \{0,1\}$) mit der Potenzmenge (Menge der Teilmengen) von B.

Def. Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind (d. h. die Umgebung genug Typinformation enthält), schreiben wir eine Einermenge ohne Mengenklammern.

2.1.2 Relationen

Def. R ist Relation auf einer Menge M, wenn $R \subseteq M \times M$.

Def. Die identische Relation auf M ist $1 = \{(x, x) \mid x \in M\}$.

Def. Das Produkt von zwei Relationen R, S auf M ist

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y \in M : (x, y) \in R, (y, z) \in S.$$

Def. $R^0 = 1$, $R^{k+1} = R \circ R^k$.

Def. $R^+ = \cup_{k \geq 1} R^k$.

Def. $R^* = \cup_{k \geq 0} R^k$.

Def. $R^{-1} = R^- = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$.

Def. (Projektion): Für Relation R auf M und Menge $A \subseteq M$:

$$R(A) = \{y \mid \exists x \in M : (x, y) \in R\}$$

2.1.3 Funktionen

Def. Eine Relation $f \subseteq M \times N$ ist eine totale Funktion von M nach N, geschrieben $f : M \to N$, wenn $\forall m \in M : \exists \text{genau ein} n \in N : (m, n) \in f$.

Def. Eine Relation $f \subseteq M \times N$ ist eine partielle Funktion von M nach N, geschrieben $f : M \hookrightarrow N$, wenn $\forall m \in M : \exists \text{höchstens ein} n \in N : (m, n) \in f$.

Für Funktionen nutzen wir die eben für Relationen erklärten Bezeichungen.
Übg: Wenn $f : M \to N$ und $A \subseteq M, B \subseteq N$, was bedeuten $f(A), f^{-1}(B), f^*(A)$?

Das Adjektiv "total" lassen wir meist weg. Jede totale Funktion ist auch eine partielle Funktion. D. h. jede Aussage über partielle Funktionen gilt auch für totale.

Def. Der Wertebereich $\mathsf{Range}(f)$ einer partiellen Funktion $f : M \hookrightarrow N$ ist $f(M)$.

Def. Der Definitionsbereich $\mathsf{Dom}(f)$ einer partiellen Funktion $f : M \hookrightarrow N$ ist $f^{-1}(N)$.

Def. Wir schreiben $f(x) \downarrow$, falls $x \in \mathsf{Dom}(f)$, und $f(x) \uparrow$, falls $x \notin \mathsf{Dom}(f)$.

2.2 Wörter

Def. Die leere Folge heißt () oder ϵ.

Def. Zu einer Menge M bezeichnet M^* (bzw. M^+) die Menge der endlichen Folgen (bzw. nichtleeren Folgen) mit Elementen aus M.

Def. $\mathsf{first} : M^+ \to M : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Def. $\mathsf{last} : M^+ \to M : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n$

Def. $\mathsf{tail} : M^+ \to M^* : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n)$

Def. $\cdot : M^* \times M^* \to M^* : ((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$

Satz: $(M^*, \cdot, \epsilon)$ ist eine Halbgruppe.

Def. Die Länge $\mathsf{length}(w)$ einer Folge $w = (w_1, \ldots, w_n)$ ist n. Wir schreiben auch kürzer $|w|$.

Def. Ein Wort $u \in M^*$ ist Präfix eines Wortes $v \in M^*$, geschrieben $u \leq v$, wenn $\exists w \in M^* : uw = v$.

Satz. $(M^*, \leq)$ ist eine Halbordnung.

2.3 Bäume

2.3.1 Signaturen

Eine Signatur Σ_f ist ein Paar (Σ, f), wobei $f : \Sigma' \to I\!N$ eine Funktion ist, die jedem Funktionssymbol eine Stelligkeit (Argumentzahl) zuordnet.

Wenn f aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir nur Σ und meinen (Σ, f).

Wir schreiben $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \ldots$, dabei ist Σ_k die Menge der Symbole mit Stelligkeit k.

2.3.2 Bäume

Die Menge $\mathsf{Tree}(\Sigma)$ der Bäume über Σ ist die kleinste Menge M mit der Eigenschaft:

$$\forall k : \forall f \in \Sigma_k : \forall t_1 \in M : \ldots : \forall t_k \in M : f(t_1, \ldots, t_k) \in M.$$

Also die freie (Term-)Algebra über der Signatur. Siehe Abschnitt Algebra.

Für $g \in \Sigma_0$ schreiben wir nicht $g()$, sondern einfach g.

Manchmal sagen wir Term und meinen Baum.

2.3.3 Positionen in Bäumen

Def. Ein Baum $t \in \mathsf{Tree}(\Sigma)$ bestimmt eine Menge von Positionen $\subseteq \{1, \ldots\}^*$ durch

$$\mathsf{Pos}(f(t_1, \ldots, t_k)) = \epsilon \cup \bigcup_i \{i \cdot p \mid p \in \mathsf{Pos}(t_i)\}$$

Beispiel: $t = f(f(a, a), a)$. Dann ist $\mathsf{Pos}(t) = \{\epsilon, 1, 2, 11, 12\}$.

Wir beschreiben also einen Weg, von der Wurzel beginnend.

Satz. $(\mathsf{Pos}(t), \leq)$ ist eine Halbordnung.

Def. Die Blattpositionen $\mathsf{LPos}(t)$ eines Baumes $t \in \mathsf{Tree}(\Sigma)$ sind die maximalen Elemente der Halbordung $(\mathsf{Pos}(t), \leq)$.

Def. Für $t \in \mathsf{Tree}(\Sigma), p \in \mathsf{Pos}(t)$ bezeichnet $t[p]$ das Funktionssymbol oder auch den Teilbaum an der Stelle p in t.

Def. Für $t, s \in \mathsf{Tree}(\Sigma), p \in \mathsf{Pos}(t)$ bezeichnet $t[p \mapsto s]$ den Baum, den man aus t durch Einsetzen von s an der Position p erhält.

Def. t' ist Teilbaum von t, geschrieben $t' \trianglelefteq t$, falls $\exists p \in \mathsf{Pos}(t)$ mit $t[p] = t'$.

Def. t' ist echter Teilbaum von t, geschrieben $t' \triangleleft t$, falls $t' \trianglelefteq t$ und $t' \neq t$.

Das ist das gleiche wie: $\exists p \in \mathsf{Pos}(t) \setminus \epsilon$ mit $t[p] = t'$.

Satz. $(\mathsf{Tree}(\Sigma), \trianglelefteq)$ ist eine Halbordnung.

2.3.4 Maße für Bäume

Def. Die Größe eines Baumes ist die Anzahl seiner Funktionssymbole:

$$\mathsf{size}(f(t_1, \ldots, t_k)) = 1 + \mathsf{size}(t_1) + \ldots + \mathsf{size}(t_k).$$

Übg: $\mathsf{size}(t) = |\mathsf{Pos}(t)|$.

Def. Die Tiefe eines Baumes ist die maximale Länge eines Weges von Wurzel zu Blatt:

$$\mathsf{depth}(f(t_1, \ldots, t_k)) = 1 + \max\{\mathsf{depth}(t_1) + \ldots + \mathsf{depth}(t_k)\}.$$

Übg: $\mathsf{depth}(t) = \max\{|p| \mid p \in \mathsf{Pos}(t)\}$.

2.3.5 Variablen

Die Menge $\mathsf{Tree}(\Sigma, V)$ der Bäume über Σ mit Blattvariablen aus V ist $\mathsf{Tree}(\Sigma \cup V)$.

Def. Die Menge der Variablen-Positionen von $t \in \mathsf{Tree}(\Sigma, V)$ ist

$$\mathsf{VPos}(t) = \{p \mid p \in \mathsf{Pos}(t), t[p] \in V\}.$$

Def. Ein Baum aus $\mathsf{Tree}(\Sigma, V)$, der jede Variable höchstens einmal enthält, heißt linear.

Def. Ein Term aus $\mathsf{Tree}(\Sigma, V)$ ohne V heißt Grund-Term.

2.3.6 Substitutionen

Def. Eine Substitution ist eine partielle Abbildung $\sigma : V \to \mathsf{Tree}(\Sigma)$ mit $\mathsf{Dom}(\sigma)$ endlich.

Def. Eine Substitution σ kann ausgedehnt werden zu einer Abbildung $\sigma' : \mathsf{Tree}(\Sigma, V) \to \mathsf{Tree}(\Sigma, V)$.

D. h. wir ersetzen alle Variablen aus $\mathsf{Dom}(\sigma)$, die in t vorkommen.

Wir bezeichnen σ' ebenfalls mit σ.

Wir schreiben oft $t\sigma$ anstelle von $\sigma(t)$.

2.3.7 Kontexte

Def. Ein Term $c \in \mathsf{Tree}(\Sigma, \bullet)$ mit genau einem Vorkommen der Variablen $\bullet$ heißt Kontext.

Def. Die Menge der Kontexte über Σ ist $\mathsf{Con}(\Sigma)$.

Def. Wenn $C \in \mathsf{Con}(\Sigma)$ und $t \in \mathsf{Tree}(\Sigma)$, dann ist $C[t]$ eine Abkürzung für $C\sigma$ mit $\sigma : \bullet \mapsto t$.

2.4 Algebren

Def. Ein Paar (M, F) ist eine Σ-Algebra: M ist eine Menge (Trägermenge),

$$F : \bigcup_k (\Sigma_k \to (M^k \to M))$$

ist eine Interpretation der Funktionssymbole, die jedem f aus Σ_k eine k-stellige Funktion auf M zuordnet.

Bsp. $\mathsf{Tree}(\Sigma)$ ist eine Σ-Algebra. Jedes Funktionssymbol wird durch "sich selbst" interpretiert.

Def. Der Operator map dehnt die zur Σ-Algebra (M, F) gehörende Interpretation F aus zu einer Funktion $\mathsf{map}\, F : \mathsf{Tree}(\Sigma) \to M$ durch

$$(\mathsf{map}\, F)(g(t_1, \ldots, t_k)) = (Fg)((\mathsf{map}\, F)(t_1), \ldots, (\mathsf{map}\, F)(t_k))$$

Eine solche Funktion $\mathsf{map}\, F$ heißt Homomorphismus, manchmal auch nur Morphismus.

Bsp. Die Abbildung size ist ein Hom. von $\mathsf{Tree}(\Sigma)$ nach $\mathbb{N}$. Die Interpretation F bildet jedes $f \in \Sigma_k$ ab auf die Funktion

$$Ff : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto 1 + x_1 + \ldots + x_k$$

Wir schreiben den dadurch erzeugten Homomorphismus $h = \mathsf{map}\, F$ auch vereinfacht als

$$h : f(x_1, \ldots, x_k) \mapsto 1 + x_1 + \ldots + x_k.$$

Beachte dabei, daß auf der linken Seite die Typen nicht stimmen: f erwartet Argumente vom Typ $\mathsf{Tree}(\Sigma)$, aber die x_i sind aus $\mathbb{N}$. Wir wissen aber, wie es gemeint ist.

Übg. Die Abbildung depth ist ein Hom. von $\mathsf{Tree}(\Sigma)$ nach $\mathbb{N}$. Finde die dazu gehörende Interpretation.