Übungen zur Vorlesung Logik (Grundkurs)

Abgabe am Mittwoch, dem 8. 7. 98,
fünf Minuten *vor* der Vorlesung.

Ein *verallgemeinerter Baum* auf einer Menge U ist eine dreistellige Funktion Y mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} Y(a,b,c) = Y(b,a,c) = Y(a,c,b) \\ Y(a,b,a) = a \\ Y(Y(a,b,c),d,e) = Y(Y(a,d,e),b,Y(c,d,e)) \end{aligned}$$

Wieso heißt das *Baum*? In der Graphentheorie ist ein Baum ein ungerichteter, kreisfreier, zusammenhängender Graph. Durch welche Funktion Y wird die Menge seiner Knoten zu einem verallgemeinertem Baum? (Hinweise: In jedem Baum gibt es zwischen je zwei Knoten genau einen Weg. Der Buchstabe Y sieht aus wie ein Baum.)

Wieso heißt es *verallgemeinert*? Weil es Modelle gibt, die keine graphentheoretischen Bäume sind: Finden Sie eine Funktion Y, die die Potenzmenge einer beliebigen Menge M zu einem Baum macht.

Zeigen Sie, daß für jedes a die durch

$$b \leq_a c \quad :\Leftrightarrow \quad b = Y(a,b,c)$$

definierte Relation $\leq_a$ eine Halbordnung auf U ist.

Beschreiben Sie die Halbordnung für die obigen zwei Beispiele.

Finden Sie in der Signatur mit einer Konstanten c und einer einstelligen Funktion f 1.) ein kanonisches, 2.) ein nicht kanonisches Modell für

$$\forall x : \quad f(f(x)) \quad = \quad x$$

sowie 3.) einen Zeugen für

$$\exists y : \quad f(c) \quad = \quad f(f(y))$$