Übungen zur Vorlesung Logik (Grundkurs)

Abgabe am Mittwoch, dem 1. 7. 98,
fünf Minuten *vor* der Vorlesung.

14.1 Eine $\forall$-Formel hat die Form $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A$ für quantorenfreies A, entsprechend definieren wir eine $\exists$-Formel.

Finden Sie eine $\forall$-Formel, die zu einer $\exists$-Formel äquivalent ist,
sowie eine $\forall$-Formel, die zu *keiner* $\exists$-Formel äquivalent ist.

10.3 Zeigen Sie: für jede endliche Menge M von natürlichen Zahlen gibt es eine Formel F, so daß die Größe (= Anzahl der Elemente des Universums) jedes normalen Modells von F eine Zahl aus M ist.

15.1 Eine Aussage A heißt *unabhängig* von einer Formelmenge X,
wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

- $X \not\models A$ und $X \not\models \neg A$.
- es existieren Modelle M und N von X mit $M \models A$ und $N \models \neg A$.

Zeigen Sie, daß beide Bedingungen äquivalent sind.

15.2 Gruppen sind normale Modelle für die Formelmenge G:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \tag{1}$$

$$1 \cdot x = x \tag{2}$$

$$x \cdot 1 = x \tag{3}$$

$$\forall x \exists y \quad x \cdot y = 1 \tag{4}$$

Folgt eine dieser Formeln aus den restlichen drei?

Ist die Aussage $\forall x \forall y : x \cdot y = y \cdot x$ unabängig von G?

Ist die Aussage $\forall x \exists y : y \cdot x = 1$ unabhängig von G?