Berechenbarkeit und Komplexität Sommersemester 03

Aufgabenserie 5 – bis 7. 7. 03

Es werden noch je eine autotool-Aufgabe

PCP) zum Postschen Korrespondenz-Problem, (1 Punkt)

SAT) und zur Erfüllbarkeit Boolescher Formeln (1 Punkt)

gestellt. Einzelheiten dann auf Webseite und Mailingliste.

Bis dahin probieren Sie das Puzzle hier: `http://www.informatik.uni-leipzig.de/~pcp/`

CFI) Die Menge CFI besteht aus allen Paaren von kontextfreien Grammatiken (G_1, G_2) mit $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$. Beweisen Sie PCP $\leq$ CFI (mit der Folgerung, daß CFI nicht entscheidbar ist), indem Sie die folgende Reduktion vervollständigen und verifizieren:

Aus einer PCP-Instanz $P = [(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)]$ (o. B. d. A. über Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$) konstruiert man ein Paar von Grammatiken (G_1, G_2) über dem Alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$ mit

- G_1 mit Startsymbol S und Regeln $\{S \to \#, S \to u_1 S v_1^-, \dots, S \to u_n S v_n^-\}$, wobei w^- das Spiegelwort zu w bezeichnet.
- geben Sie eine passende Grammatik G_2 an (Hinweise: G_2 hängt *nicht* von P ab.) (1 Punkt)

so daß P genau dann eine Lösung besitzt, wenn $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$.

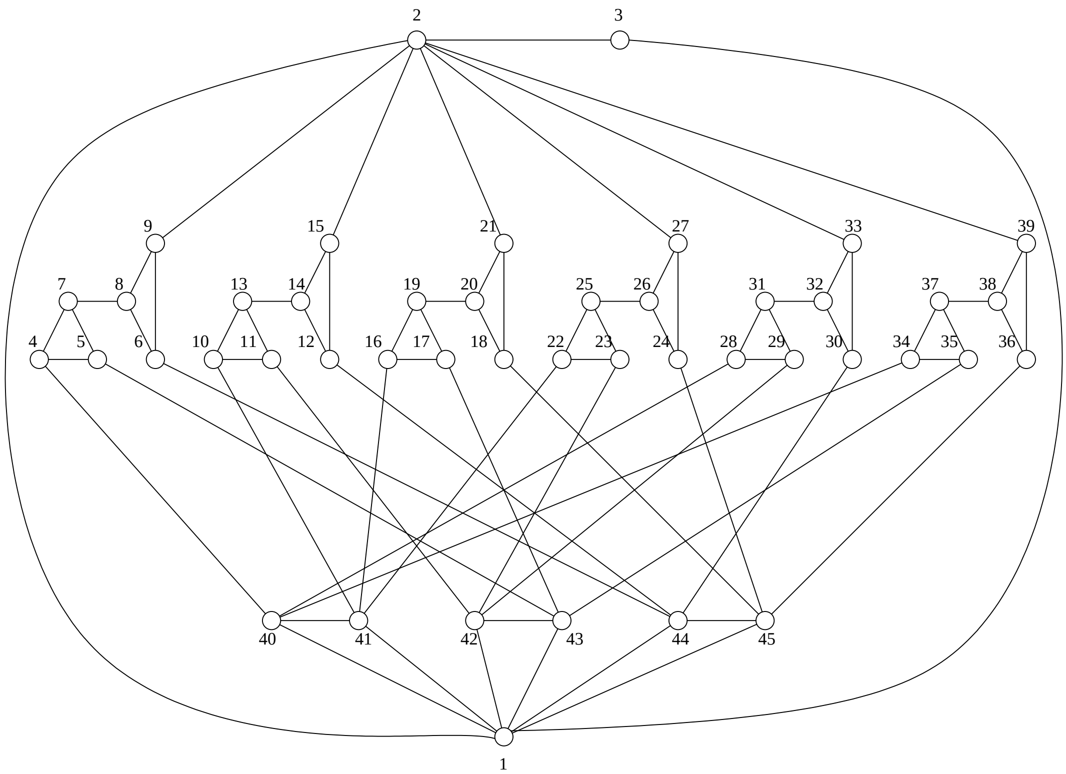
- Zeigen Sie: wenn P eine Lösung $[i_1, \dots, i_k]$ besitzt, dann ist $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$, indem Sie ein Wort $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ angeben. (1 Punkt)
- Zeigen Sie: wenn ein Wort $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ existiert, dann besitzt P eine Lösung $[i_1, \dots, i_k]$ (2 Punkte)

Hinweis: betrachten Sie das Beispiel $P = [(110, 1), (0, 1), (1, 01)]$. Wie sehen G_1 und G_2 aus? Gibt es $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$?

(Aufgabe COL auf der Rückseite!)

COL) Eine k-Färbung eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : V \to \{1, 2, \dots, k\}$, so daß für jede Kante $(x, y) \in E$ gilt: $f(x) \neq f(y)$.

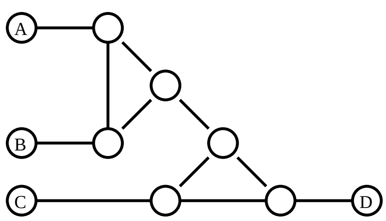
Besitzt dieser Graph eine 3-Färbung?



Hinweise: o. B. d. A. sind die Farben von 1: Grün, 2: Blau, 3: Rot. Dann ist für jedes Paar $(40, 41), (42, 43), (44, 45)$ genau ein Knoten blau, einer rot. Das kodiert die Belegungen von drei aussagenlogischen Variablen x_1, x_2, x_3; durch x_1 wahr $\iff$ 40 rot, x_2 wahr $\iff$ 42 rot, usw.

Die Teilgraphen $\{4 \dots 9\}, \{10 \dots 15\}, \dots$ entsprechen den Klauseln einer Formel in konjunktiver Normalform, zum Beispiel kodiert $\{4 \dots 9\}$ die Klausel $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$. Welcher Formel entspricht damit der gesamte Graph? Ist sie erfüllbar? Welche Färbung für G ergibt sich ggf? (1 Punkt)

Beweisen Sie, daß in jeder 3–Färbung des folgenden Teilgraphen



die Knoten A, B, C, D nicht alle gleichfarbig sein können; sowie daß jede andere Kombination von rot/blau für diese vier Knoten realisierbar ist. (1 Punkt)

Zeigen Sie damit: Die kodierte Formel ist erfüllbar $\iff$ der Graph besitzt eine 3–Färbung. (2 Punkte)