Berechenbarkeit und Komplexität Sommersemester 03

Aufgabenserie 4 – bis 23. 6. 03

DIAG) Das folgende Schema heißt *Diagonal–Argument*.

1. Wir betrachten eine Klasse von Funktionen F und eine Aufzählung $f_0, f_1, f_2, \dots$ aller ihrer Elemente (d. h. zu jedem $f \in F$ gibt es wenigstens einen Index i, so daß $f = f_i$).
2. Wir bilden die Diagonal–Funktion $d : x \mapsto f_x(x) + 1$. Diese kommt auch in F vor, und deswegen auch in der Aufzählung. Für die Funktion d gibt es also einen Index i mit $d = f_i$.
3. Dann berechnen wir $d(i)$, und erhalten einen Widerspruch: Weil i ein Index für d ist, gilt $d(i) = f_i(i)$; andererseits ist d so definiert, daß $d(i) = f_i(i) + 1$.

Diskutieren Sie jeweils für die Funktionenklassen (5 Punkte)

1. konstante Funktionen,
2. primitiv rekursive Funktionen,
3. totale μ-rekursive Funktionen,
4. totale Funktionen,
5. μ-rekursive Funktionen,

welcher der Schritte 1. bis 3. ein Trugschluß ist.

ENT) Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen allgemeingültig sind. Geben Sie jeweils Beweis oder Gegenbeispiel an.

Für jede totale μ-rekursive Funktion f, entscheidbare Menge A, und aufzählbare Menge B ist:

1. $f(A)$ entscheidbar,
2. $f(A)$ aufzählbar,
3. $f^{-1}(A)$ entscheidbar,
4. $f(B)$ entscheidbar,
5. $f^{-1}(B)$ aufzählbar.

(5 Punkte)