Berechenbarkeit und Komplexität Sommersemester 01

Aufgaben zu Kodierungen und Universalitätsprinzip

UNI1) Die Folge $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ der *Fibonacci*–Zahlen ist festgelegt durch

$$f(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f(n+2) = f(n+1) + f(n)$$

Finden Sie eine primitiv–rekursive Darstellung für f.

Hinweis: benutzen Sie eine zweistellige Hilfsfunktion h mit der Eigenschaft

$$h(n) = \texttt{paar}(f(n+1), f(n)).$$

Schicken Sie diese Funktion h an das autotool. Benutzen Sie die eingebauten Funktionen `paar, links, rechts` zur Kodierung und Dekodierung von Zahlenpaaren.

UNI2) Programmieren Sie selbst einen Satz primitiv-rekursiver Funktionen `paar, links, rechts` mit den Eigenschaften

```
forall x, y : links  (paar (x, y)) = x
forall x, y : rechts (paar (x, y)) = y
```

Sie können bei Bedarf auch die eingebauten Funktionen `Builtin 1 "sqrt"` (Quadratwurzel, abgerundet) und `Builtin 1 "log"` (Logarithmus zur Basis 2, abgerundet) benutzen.

Schicken Sie Ihre Lösung in dieser Form an autotool (Layout–Regel beachten, siehe FAQ):

```
import Fun
import Code
student = Code { paar   = ...
               , links  = ...
               , rechts = ...
               }
```

UNI3) (Siehe Aufgabe FUN4) Beschreiben Sie, wie man eine partiell–rekursive Darstellung für die Ackermann–Funktion erhält.

Hinweis: benutzen Sie den Satz über die Kleeneschen Normalform, und beschreiben Sie die dabei benutzen Funktionen g und h.

UNI4) Erläutern und beweisen Sie den *doppelten Fixpunktsatz* (Smullyan, 1961):

Wenn $(\phi_0, \phi_1, \ldots)$ eine Gödelisierung der Menge aller partiell–rekursiven Funktionen ist, dann gibt es für beliebige zwei partiell–rekursive Funktionen f, g immer zwei Zahlen a, b mit

$$\forall x \in \mathbb{N}: \quad \phi_a(x) = f(a, b, x) \wedge \phi_b(x) = g(a, b, x)$$

Fassen Sie a bzw. b als Programmtexte (für die Funktionen ϕ_a bzw. ϕ_b) auf! f und g sind dann Funktionen, die zunächst zwei Programmtexte (a und b) lesen und danach einen Zahl (x).

Kulturelle Bemerkung:

Raymond Smullyan ist ein berühmter Amateurzauberer, Logiker und Rätselbuchautor.
`http://www.randomhouse.com/special/puzzles/smullyan/smullyan.html`