Auswertung zweites Testat

Aufgabe 1

Punkte

Mengen A, B angeben (1), nachweisen, daß nicht entscheidbar (1), Durchschnitt angeben und nachweisen, daß entscheidbar (1), Programm für $\chi_{C \cup D}$ angeben (1) und Korrektheit/Berechenbarkeit diskutieren (1)

beliebte Fehler

F1) C entscheidbar $\Rightarrow$ <u>es existiert eine</u> charakteristische Funktion...

Die charakteristische Funktion χ_M einer Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ existiert *immer*. Aber nicht jede solche Funktion ist berechenbar.

F2) ... $x \in B$ und <u>x unentscheidbar</u> ...

Typfehler. x ist eine Zahl. Entscheidbarkeit ist aber eine Eigenschaft von *Mengen* von Zahlen.

F3) Menge der Primzahlen (ungeraden Zahlen, Fakultäten, ...) ist nicht entscheidbar, weil sie unendlich ist.

Ganz großer Quatsch, bzw. etwas höflicher: Sie haben den wesentlichen Begriff des zweiten Kapitels der Vorlesung, nämlich *entscheidbare Menge*, überhaupt nicht erfaßt. Holen Sie das schnellstens nach! Machen Sie sich klar, daß es außer endlichen Mengen noch viele, viele unendliche Mengen gibt, die entscheidbar sind.

F4) Wenn $K \subseteq \mathbb{N}$ nicht entscheidbar, und $G :=$ Menge der geraden Zahlen, dann ist $K \cup G$ nicht entscheidbar.

Falsch. (Kommt auf K an, also nicht allgemeingültig.) Beispiel: $K = \{2x : x \in H\}$, wobei H eine unentscheidbare Menge ist. Dann gilt $K \cup G = G \in \mathsf{REC}$.

F5) ... Menge aller unendlich langen Zahlen ... nicht gödelisierbar ...

Das stimmt schon, aber nützt hier nichts. Die Mengen sollten ja $\subseteq \mathbb{N}$ sein.

Zeigen Sie mir mal eine unendlich lange Zahl! Bei uns (jedenfalls $\leq$ 4. Semester) geht es um *Wörter*, und die sind *endlich* lang. Allerdings gibt es davon *unendlich viele*. Jedoch nur *abzählbar viele*.

F6) χ_A und χ_B sind charakteristische Funktionen. Dann ist $\chi_A \vee \chi_B$ ...

Typfehler. Ein "Oder" von Funktionen? Was ist denn $\sin \wedge \log$?

F7) Wenn $K \subseteq \mathbb{N}$ nicht entscheidbar, und $G :=$ Menge der geraden Zahlen, dann ist $K \cap G$ nicht entscheidbar.

Nicht allgemeingültig, siehe F4 (Übungsaufgabe).

Selbst wenn Sie sagen, K soll ein Halteproblem sein — wenn Sie eine ungünstige Gödelisierung (der Turingmaschinen) erwischen, dann halten vielleicht die Maschinen mit geraden Nummern alle im nullten Schritt!

F8) (in einem Algorithmus) "if C entscheidbar then ... else"

Ebenen–Fehler. Woher soll denn die Maschine wissen, ob C entscheidbar ist? In welcher Form wird denn C eingegeben? C wird nämlich *gar nicht* eingegeben, sondern nur eine Zahl x, von der dann $x \in C \cup D$ festzustellen ist.

Aufgabe 2

Punkte

$A \leq \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \leq A$ (1), $\overline{A} \leq A \in \mathsf{RE} \Rightarrow \overline{A} \in \mathsf{RE}$ (1), $A \in \mathsf{RE} \wedge \overline{A} \in \mathsf{RE} \Rightarrow A \in \mathsf{REC}$ (1), Beweis $A \leq B \Rightarrow \overline{A} \leq \overline{B}$ (1), insgesamt exakte Formulierungen (1).

beliebte Fehler

F9) Wenn $A \leq B$, dann hat B ebensoviele Elemente wie $A \ldots$

Das ist erstens falsch und zweitens irrelevant. Beispiel: Menge der geraden Zahlen $\leq \{0, 1\}$ durch die Funktion $f : x \to (x \bmod 2)$.

Um Vergleich der Mächtigkeiten geht es in der Berechenbarkeit gar nicht. Jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ (und andere betrachten wir hier nicht) ist trivialerweise endlich oder *abzählbar* unendlich. D. h. es gibt eine Bijektion f zu $\mathbb{N}$. Uns interessiert die Schwierigkeit von M, z. B. die Frage, ob dieses f *berechenbar* ist.

F10) $A \leq B \wedge B \leq A$, also existiert eine Bijektion $f : A \leftrightarrow B$.

Vorsicht! Erstens könnte A endlich sein, aber B nicht, und zweitens nützt der Vergleich der Mächtigkeiten nichts (F9).

Aus den Definitionen folgt zunächst nur, daß eine berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $\forall x \in \mathbb{N} : x \in A \iff g(x) \in B$, sowie eine Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\forall x \in \mathbb{N} : x \in B \iff h(x) \in A$.

Im Allgemeinen haben g und h nichts miteinander zu tun. Das muß man erstmal zeigen, wie man daraus eine Bijektion f konstruiert (siehe Cantor–Bernsteinscher Äquivalenz–Satz).

F11) $A \leq B$ Durch Kontraposition folgt $\neg A \not\leq \neg B$.

Typfehler. Folgt etwa aus $3 = 1 + 2$ durch Kontraposition, daß $\neg 3 \neq \neg 1 + 2$? Was ist überhaupt die Negation einer Zahl? Unsinn.

Aufgabe 3

Punkte

richtige Antworten (ohne Begründung) insgesamt (1).

a) Reguläre Sprachen effektiv abgeschlossen unter Durchschnitt (1), Leerheitsproblem entscheidbar (1)

b) Beweis–Idee: Reduktion von einem anderen unentscheidbaren Problem (1), Beweis–Durchführung (z. B. Grammatiken G_1, G_2) richtig konstruiert (1)

F12) …Sprache L ist entscheidbar, deswegen ist die Frage $\emptyset = L$ entscheidbar.

Nein! Sie müssen zwei Fragestellungen auseinanderhalten:

Wortproblem:
Eingabe: eine Grammatik G und ein Wort w
Frage: gilt $w \in L(G)$?

Leerheits–Problem:
Eingabe: eine Grammatik g Frage: gilt $\emptyset = L(G)$?

Beim Wortproblem steht w mit in der Eingabe, beim Leerheitsproblem nicht. Wiederholen Sie (3. Semester), für welche Chomsky–Klassen das Wortproblem entscheidbar ist, und für welche das Leerheitsproblem!

F13) …auf PCP reduzierbar, und <u>deswegen</u> unentscheidbar.

Falsch. Wenn schon, dann andersrum. Die Frage "ist x eine gerade Zahl" ist auch auf das PCP reduzierbar: dazu brauche ich nur je eine lösbare Instanz I_0 und eine unlösbare Instanz I_1, und dann reduuziere ich so: $f(x) :=$ if x gerade then I_0 else I_1.

Was Sie hoffentlich meinen, ist: $\mathsf{PCP} \le B \wedge \mathsf{PCP} \notin \mathsf{REC} \Rightarrow B \notin \mathsf{REC}$.

F14) …kontextfreie Sprachen nicht abgeschlossen unter Durchschnitt, <u>deswegen</u> $\emptyset = L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht entscheidbar.

Das Resultat stimmt, aber nicht die Begründung. Gegenbeispiel: für CF–Sprachen ist das Wortproblem lösbar, und für Durchschnitte von CF–Sprachen auch.

F15) Grammatik $S \to 0A \mid 1B \mid \epsilon, A \to S0, B \to S1$ erzeugt Palindrome und ist *linear, also regulär.*

Fast richtig, richtig, und *falsch*!

Die Grammatik erzeugt nicht alle Palindrome, sondern nur die mit gerader Länge.

Sie ist tatsächlich *linear* (in jeder Regel steht rechts höchstens ein Metazeichen), aber *nicht linkslinear* und auch *nicht rechtslinear* (weil die Metazeichen sowohl am linken als auch rechten Ende von Regeln stehen). Deswegen ist es *keine reguläre Grammatik*, und die erzeugte Sprache in diesem Fall auch wirklich nicht regulär, wie man durch Pumping–Lemma sieht.

F16) …unendlich lange Wörter…

gibt es bei uns noch nicht. Siehe F5. Jedes in einer Grammatik ableitbare Wort ist *endlich*. Es kann sein, daß *unendlich viele* Wörter ableitbar sind, d. h. daß die ableitbaren Wörter *beliebig lang* sind. Das ist was anderes als *unendlich lang*!