Berechenbarkeit und Komplexität Sommersemester 01

Aufgaben zu Reduktionen/Entscheidbarkeit

Bezeichnungen (siehe voriges Blatt, und):

Die von der Turingmaschine mit der Nummer i berechnete partielle Funktion heißt ϕ_i.

Wir schreiben $A \leq B$, wenn eine allgemein rekursive Funktion h existiert,
so daß $x \in A \iff h(x) \in B$;
und $A \approx B$, wenn $A \leq B \land B \leq A$.

RED1) Finden Sie alle Beziehungen $\leq$ zwischen den Mengen

$$T = \{x : \phi_x \text{ ist total}\}, \qquad I = \{x : \mathsf{Dom}\ \phi_x \text{ ist unendlich}\}, \qquad H = \{x : x \in \mathsf{Dom}\ \phi_x\}$$

und ihren Komplementen. Leiten Sie Folgerungen für Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit ab. Zeigen Sie insbesondere

- T ist nicht entscheidbar
- $T \not\leq H$
- T ist nicht aufzählbar

RED2) Zeigen Sie, daß das folgende Problem CFPAL nicht entscheidbar ist:

- Eingabe: eine kontextfreie Grammatik G
- Frage: enthält $L(G)$ ein Palindrom?

Hinweis: Zeigen Sie PCP $\leq$ CFPAL, indem Sie einen Algorithmus angeben, der zu jeder PCP–Instanz $I = [(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)]$ eine kontextfreie Grammatik G_I konstruiert, für die $L(G_I)$ genau dann ein Palindrom enthält, wenn I eine Lösung besitzt.

PCP) Lösen sie das *PCP–Puzzle* `http://www.informatik.uni-leipzig.de/~pcp/` (täglich frische Ware!) — Welche der folgenden PCP–Instanzen sind lösbar?

$$\begin{pmatrix} 110 & 0 & 1 \\ {\scriptscriptstyle A} & {\scriptscriptstyle B} & {\scriptscriptstyle C} \\ 1 & 1 & 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 & 0 & 10 \\ {\scriptscriptstyle A} & {\scriptscriptstyle B} & {\scriptscriptstyle C} \\ 0 & 100 & 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 001 \\ {\scriptscriptstyle A} & {\scriptscriptstyle B} & {\scriptscriptstyle C} \\ 001 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 10 & 001 \\ {\scriptscriptstyle A} & {\scriptscriptstyle B} & {\scriptscriptstyle C} \\ 001 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 101 \\ {\scriptscriptstyle A} & {\scriptscriptstyle B} & {\scriptscriptstyle C} \\ 01 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie können Ihre Lösung in der Form `student = "ABAABABBA..."` unter dem Subject `PCP1`, `PCP2`, … vom autotool prüfen lassen.

Wenn Sie jedoch keine Lösung finden, begründen Sie die Unlösbarkeit der Instanz. Die ersten, die das komplett schaffen, erhalten einen Preis. (Eine dieser Instanzen ist echt schwer.)