Berechenbarkeit und Komplexität Sommersemester 01

Aufgaben zu Entscheidbarkeit/Aufzählbarkeit

Bezeichnungen:

wenn f eine (partielle) Funktion $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ ist,
dann ist $\mathsf{Range}\ f = f(\mathbb{N})$ ihr Wertebereich und $\mathsf{Dom}\ f = f^{-1}(\mathbb{N})$ ihr Definitionsbereich.

Eine partielle Funktion heißt *allgemein rekursiv*, wenn sie partiell rekursiv *und* total ist.

ENT1) (wichtig) Das folgende Schema heißt *Diagonal–Argument.*

1. Wir betrachten ein Klasse von Funktionen F und eine Aufzählung $f_0, f_1, f_2, \ldots$ aller ihrer Elemente.
2. Wir bilden die Diagonal–Funktion $d(x) = f_x(x) + 1$. Diese kommt auch in F vor, und deswegen auch in der Aufzählung. Für die Funktion d gibt es also einen Index i mit $d = f_i$.
3. Dann berechnen wir $d(i)$, und erhalten einen Widerspruch: Weil i ein Index für d ist, gilt $d(i) = f_i(i)$; andererseits ist d so definiert, daß $d(i) = f_i(i) + 1$.

Diskutieren Sie jeweils für die Funktionenklassen

- konstante Funktionen,
- primitiv rekursive Funktionen,
- allgemein rekursive Funktionen,
- totale Funktionen,
- partiell rekursive Funktionen,

welcher der Schritte 1. bis 3. ein Trugschluß ist.

ENT2) Es ist f eine allgemein rekursive Funktion, und A eine entscheidbare, sowie B eine aufzählbare Menge. Finden Sie allgemeingültige Aussagen über Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit der Mengen

$$f(A), f(B), f^{-1}(A), f^{-1}(B).$$

ENT3) Finden Sie Mengen $A \subset B \subset C \subset D$, so daß B und D entscheidbar sind, aber A und C nicht!

Moral: Die Relation „ist weniger kompliziert als“ hat *nichts* mit der Relation „ist Teilmenge von“ zu tun!