Aufgaben (mit Hinweisen) zur Logik (7. 6.)

---

951) (Douglas Hofstadters MU-Rätsel) Wir betrachten die Deduktionsrelation auf Wörtern aus dem Alphabet $\Sigma = \{A, B\}$, die erzeugt wird von dem Axiom A (d. h. ein Wort der Länge 1, das nur den Buchstaben A enthält) und diesen Schlußregeln (u und w stehen für beliebige Wörter)

1. an ein Wort, das auf A endet, ein B anhängen: $\dfrac{wA}{wAB}$
2. ein Wort verdoppeln: $\dfrac{w}{ww}$
3. drei A durch ein B ersetzen: $\dfrac{uAAAw}{uBw}$
4. zwei B löschen: $\dfrac{uBBw}{uw}$

Beispiel: $A \vdash_2 AA \vdash_2 AAAA \vdash_1 AAAAB \vdash_3 ABB \vdash_2 ABBABB \vdash_4 AABB$.
Kann man B ableiten?

Hinweis. Nein, siehe den nächsten Teil der Aufgabe.
Kann man $ABAB$ ableiten?

Hinweis. Ja.
Für $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ bezeichnet $c_x(w)$ die Anzahl der x in w. Vervollständigen und beweisen Sie:

Wenn das Wort w ableitbar ist, dann gilt $c_{\boxed{?}}(w) \not\equiv \boxed{?} \pmod{\boxed{?}}$.

(Das heißt: die Zahl $c_{\boxed{?}}(w)$ läßt nicht den Rest $\boxed{?}$ bei Division durch $\boxed{?}$.)

Hinweis. Wenn Sie die richtigen Parameter haben, müssen Sie die Behauptung durch Induktion über die Ableitungslänge beweisen. Beim Induktionsschritt geht es also um die Änderung der Anzahlen der einzelnen Buchstaben. Die Regel 3 ist dabei entscheidend.
Gilt auch die Umkehrung, d. h. ist jedes Wort w ableitbar, das diese Restklassenbedingung erfüllt?

Hinweis. Ja. Betrachte als Zwischenschritt Wörter aus A^* (d. h. die nur aus Buchstaben A bestehen).

12.3) Man transformiere in die skolemsche Normalform

$$\forall x \exists y \forall z \exists w (\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y)) \tag{1}$$

$$\forall z \exists y (P(x, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)) \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x, z), z) \tag{2}$$

Hinweis. Software dazu: `http://www.informatik.uni-leipzig.de/~joe/edu/ss00/logik/progs/pl/`

12.0) Finden Sie für die Formel

$$P(c) \quad \wedge \quad \forall x: \quad f(f(x)) = x$$

- ein Modell der Größe 4
- ein abzählbar unendliches Modell
- ein kanonisches Modell

sowie einen Zeugen für

$$\exists y: \quad f(c) \quad = \quad f(f(y))$$

12.6) Für die Formelmenge $X = \{P(a) \vee P(b)\}$ gilt

$$X \quad \models \quad \exists y P(y)$$

X ist keine Henkin–Theorie: Machen Sie sich klar, daß es in der Signatur von X *keinen* Term t gibt mit

$$X \models P(t)$$

Hinweis. Was gibt es denn in dieser Signatur überhaupt für Terme?
Zusatz für Auskenner: führen Sie die Konstruktion aus dem Skript aus, die aus X eine Henkin–Theorie X^* herstellt.