Aufgaben zur Logik (7. 6.)

---

951) (Douglas Hofstadters MU-Rätsel) Wir betrachten die Deduktionsrelation auf Wörtern aus dem Alphabet $\Sigma = \{A, B\}$, die erzeugt wird von dem Axiom A (d. h. ein Wort der Länge 1, das nur den Buchstaben A enthält) und diesen Schlußregeln (u und w stehen für beliebige Wörter)

1. an ein Wort, das auf A endet, ein B anhängen: $\dfrac{wA}{wAB}$
2. ein Wort verdoppeln: $\dfrac{w}{ww}$
3. drei A durch ein B ersetzen: $\dfrac{uAAAw}{uBw}$
4. zwei B löschen: $\dfrac{uBBw}{uw}$

Beispiel: $A \vdash_2 AA \vdash_2 AAAA \vdash_1 AAAAB \vdash_3 ABB \vdash_2 ABBABB \vdash_4 AABB$.
Kann man B ableiten?
Kann man $ABAB$ ableiten?
Für $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ bezeichnet $c_x(w)$ die Anzahl der x in w. Vervollständigen und beweisen Sie:

$$\text{Wenn das Wort } w \text{ ableitbar ist, dann gilt} \quad c_{\boxed{?}}(w) \not\equiv \boxed{?} \pmod{\boxed{?}}.$$

(Das heißt: die Zahl $c_{\boxed{?}}(w)$ läßt nicht den Rest $\boxed{?}$ bei Division durch $\boxed{?}$.)
Gilt auch die Umkehrung, d. h. ist jedes Wort w ableitbar, das diese Restklassenbedingung erfüllt?

12.3) Man transformiere in die skolemsche Normalform

$$\forall x \exists y \forall z \exists w (\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y)) \tag{1}$$
$$\forall z \exists y (P(x, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)) \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x, z), z) \tag{2}$$

12.0) Finden Sie für die Formel

$$P(c) \quad \wedge \quad \forall x : \quad f(f(x)) = x$$

- ein Modell der Größe 4
- ein abzählbar unendliches Modell
- ein kanonisches Modell

sowie einen Zeugen für

$$\exists y : \quad f(c) \quad = \quad f(f(y))$$

12.6) Für die Formelmenge $X = \{P(a) \vee P(b)\}$ gilt

$$X \quad \models \quad \exists y P(y)$$

X ist keine Henkin–Theorie: Machen Sie sich klar, daß es in der Signatur von X *keinen* Term t gibt mit

$$X \models P(t)$$

Zusatz für Auskenner: führen Sie die Konstruktion aus dem Skript aus, die aus X eine Henkin–Theorie X^* herstellt.