Aufgaben (mit Hinweisen) zur Logik (24. 5.)

10.5 Bestimme die pränexe Normalform von

$$\forall x \exists y \forall z A(x,y,z) \to \forall y \exists z B(y,z)$$

10.6 Die Formeln A, B heißen *allgemeingültigkeits–äquivalent*,
wenn $(\models A) \iff (\models B)$.
Man zeige, daß für beliebige Formeln A jede der beiden Formeln

$$F_1 = \forall x A, \quad F_2 = A[x/c]$$

zu A allgemeingültigkeits–äquivalent sind. Dabei ist c ein Konstantensymbol, das nicht in A vorkommt.

Hinweis. Beachte, daß $S \models A$ auch einen versteckten Allquantor enthält, da es als Abkürzung für $\forall \mu : S \models_\mu A$ definiert ist.

Hinweis. Für F_2: auch hier versteckt sich ein Allquantor, da $\models A$ eine Abkürzung von $\forall S\ S \models A$ ist. Die Struktur S enthält die Interpretation des neuen Symbols c.
Finde Beispiele dafür, daß diese Formeln im allgemeine nicht *äquivalent* zu A sind.

Hinweis. Da geht es um den Unterschied zwischen

$$\forall y(C \leftrightarrow D) \text{ und } \forall y C \leftrightarrow \forall y D.$$

10.7 Beweise: zu jeder Konjunktion und jeder Disjunktion von $\forall$–Formeln findet man eine äquivalente $\forall$–Formel.
Das Entsprechende gilt für $\exists$–Formeln.

Hinweis. Wenn x nicht in B vorkommt, gilt nach Satz 3.8.5 $\forall x(A \vee B) \leftrightarrow \forall x A \vee B$. Nun ist in unserem Fall B auch eine $\forall$–Formel, in der x eventuell vorkommt. Dann benennen wir die gebundene Variable in A eben um.

10.3 Gegeben ist eine beliebige endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}^+$. Konstruiere eine Formel F mit der Eigenschaft: In jedem Modell von F ist die Größe des Universums ein Element von M.

Hinweis. Betrachte zunächst Mengen M mit nur einem Element m. Nach Voraussetzung ist $m > 0$. Finde eine Formel F_m, die nur Modelle der Größe m hat.
Erzeuge zunächst eine Formel G_m, die nur Modelle der Größe $\leq m$ hat. Wie entsteht F_m aus G_m und G_{m-1}?
Die gesuchte Formel F ist eine geeignete Verknüpfung von solchen Formeln F_m.

10.1 Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit von

- $A[x/t] \leftrightarrow \forall x(x = t \to A)$
- $A[x/t] \leftrightarrow \exists x(x = t \wedge A)$,

wobei A eine Formel ist, $x \notin \mathrm{Var}(t)$ und keine der in t vorkommenden Variablen in A gebunden ist.

Hinweis.
Es ist $\mathsf{wert_F}$ die Funktion, die den Wahrheitswert der Formel F in der Struktur S unter der Belegung μ ausrechnet.
Beweise durch Induktion über den Formelaufbau von A das Lemma

$$\mathsf{wert_F}(S, \mu, A[x/t]) = \mathsf{wert_F}(S, \mu', A),$$

wobei μ' die folgende Belegung ist:

$$\mu'(v) = \text{ if } v = x \text{ then } \mathsf{wert_T}(S, \mu, t) \text{ else } \mu(v)$$

Dabei ist $\mathsf{wert_T}$ die Funktion, die die Bedeutung des Terms t in der Struktur S unter der Belegung μ bestimmt.
Wieso folgen aus dem Lemma die Behauptungen?
An welchen Stellen werden dabei die Bedingungen über das Vorkommen der Variablen benutzt?