Aufgaben zur Logik (24. 5.)

10.5 Bestimme die pränexe Normalform von

$$\forall x \exists y \forall z A(x,y,z) \to \forall y \exists z B(y,z)$$

10.6 Die Formeln A, B heißen *allgemeingültigkeits–äquivalent*, wenn $(\models A) \iff (\models B)$.
Man zeige, daß für beliebige Formeln A jede der beiden Formeln

$$F_1 = \forall x A, \quad F_2 = A[x/c]$$

zu A allgemeingültigkeits–äquivalent sind. Dabei ist c ein Konstantensymbol, das nicht in A vorkommt.
Finde Beispiele dafür, daß diese Formeln im allgemeine nicht *äquivalent* zu A sind.

10.7 Beweise: zu jeder Konjunktion und jeder Disjunktion von $\forall$–Formeln findet man eine äquivalente $\forall$–Formel.
Das Entsprechende gilt für $\exists$–Formeln.

10.3 Gegeben ist eine beliebige endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}^+$. Konstruiere eine Formel F mit der Eigenschaft: In jedem Modell von F ist die Größe des Universums ein Element von M.

10.1 Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit von

- $A[x/t] \leftrightarrow \forall x(x = t \to A)$
- $A[x/t] \leftrightarrow \exists x(x = t \wedge A)$,

wobei A eine Formel ist, $x \notin \mathrm{Var}(t)$ und keine der in t vorkommenden Variablen in A gebunden ist.