Aufgaben (mit Hinweisen) zur Logik (3. 5.)

8.3 Die Menge $\mathsf{bvar}(A)$ der gebundenen Variablen einer Formel A ist induktiv definiert durch

(a) $\mathsf{bvar}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$ für Atomformeln

(b) $\mathsf{bvar}(\neg A) = \mathsf{bvar}(A)$

(c) $\mathsf{bvar}(A \circ B) = \mathsf{bvar}(A) \cup \mathsf{bvar}(B)$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(d) $\mathsf{bvar}(\forall x A) = \mathsf{bvar}(\exists x A) = \mathsf{bvar}(A) \cup \{x\}$

Berechnen Sie $\mathsf{bvar}(A)$ und $\mathsf{fvar}(A)$ für

$$A = \forall x(R(x, y) \rightarrow P(x) \wedge \forall y(\neg R(x, y) \wedge \forall x P(x)))$$

Hinweis. Zeichnen Sie zunächst den Strukturbaum für die Formel. Welcher Funktor oder Quantor steht in der Wurzel?
Schreiben Sie an jeden Knoten des Baums die Mengen $\mathsf{bvar}(F)$ und $\mathsf{fvar}(F)$ für die entsprechende Teilformel F.

9.2 Welche der Formeln sind allgemeingültig?

$$\begin{aligned} C &= (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x)) \\ D &= \exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y) \\ E &= \exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y)) \end{aligned}$$

Hinweis. Um sich Beispiele zu verschaffen, interpretieren Sie die Formeln über natürlichen Zahlen und die Relationssymbole beispielsweise durch "ist Primzahl", "ist siebenstellige Quadratzahl", "ist durch 2 teilbar", "ist nicht kleiner als", "ist nicht größer als".

9.4 Finden Sie ein Modell für

$$F = \forall x \neg R(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \wedge \forall x \exists y R(x, y)$$

und zeigen Sie, daß jedes Modell von F unendlich ist.

Hinweis. Zeigen Sie: jedes Modell für F enthält eine unendliche Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ von Elementen, für die $R(a_i, a_{i+1})$.
Zeigen Sie, daß diese a_i wirklich paarweise verschieden sind, indem Sie aus der Annahme $\exists i < j : a_i = a_j$ einen Widerspruch ableiten.

8.1a (Bastelaufgabe)
Auf der Menge aller Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ möchten wir das Relationssymbol P so interpretieren:

- $P(a,b,c)$ gdw. “der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks (a,b,c) ist positiv.”

Das können wir auch so lesen: “wenn wir im Punkt a sitzen und zum Punkt b schauen, dann liegt Punkt c links von der Geraden ab.”
Welche Axiome müssen wir für P ansetzen, damit wir genau die gewünschte Modellklasse erhalten? Diskutieren Sie

$$P(a,b,c) \leftrightarrow P(b,c,a) \tag{1}$$

$$\neg(P(a,b,c) \wedge P(b,a,c)) \tag{2}$$

$$\neg(P(a,b,c) \wedge P(b,a,d) \wedge P(c,b,d) \wedge P(a,c,d)) \tag{3}$$

Definieren Sie nur durch Benutzung von P das Prädikat

- $C(a,b,c,d)$ gdw. “die vier Punkte (a,b,c,d) bilden (in irgendeiner Reihenfolge) ein (nicht entartetes) konvexes Viereck.”

Welcher Gedanke wird hier ausgedrückt:

$$C(a,b,c,d) \vee C(a,b,c,e) \vee C(a,b,d,e) \vee C(a,c,d,e) \vee C(b,c,d,e)$$

Können Sie diese Formel aus den gegebenen Axiomen ableiten?