Aufgaben (mit Hinweisen) zur Logik (26. 4.)

5.2 Zeigen Sie: Wenn $\Gamma \cup \{A\} \models C$ und $\Gamma \cup \{B\} \models C$, dann $\Gamma \cup \{A \vee B\} \models C$.

Hinweis. Benutze das Deduktionstheorem $\Gamma \cup A \models B \Rightarrow \Gamma \models A \to B$.

5.3 Wir betrachten Formeln, die nur die Funktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthalten.
Für eine solche Formel C definieren wir die *duale Formel* C^d durch:

$$\begin{aligned} p^d &= p \qquad \text{für Variablen } p \\ (A \vee B)^d &= (A^d \wedge B^d) \\ (A \wedge B)^d &= (A^d \vee B^d) \\ (\neg A)^d &= \neg(A^d) \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $\models A \leftrightarrow B$ genau dann, wenn $\models A^d \leftrightarrow B^d$.

Hinweis. Zeige durch Induktion nach Formelaufbau das Lemma

$$\forall b, C : \mathsf{val}\ (b, C^d) = \mathsf{not\ val}\ (\overline{b}, C)$$

wobei $\overline{b}(v) = \mathsf{not}\ (b(v))$, und erkläre, wieso daraus die Behauptung folgt.

7.1 Eine Formelmenge X heißt *Axiomensystem* für eine Formelmenge Y, wenn $\mathsf{Mod}\ (X) = \mathsf{Mod}\ (Y)$. Wenn Y ein endliches Axiomensystem X besitzt, heißt Y *endlich axiomatisierbar*.

Geben Sie ein unendliches Y an, das endlich axiomatisierbar ist.

Hinweis. Y soll zwar unendlich viele verschiedene Formeln enthalten, aber es verbietet keiner, daß davon ziemlich viele äquivalent sind.

Zeigen Sie, daß $Y = \{p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots\}$ *nicht* endlich axiomatisierbar ist.

Hinweis. Falls doch $\mathsf{Mod}\ (Y) = \mathsf{Mod}\ (X)$ mit endlichem $X \subseteq Fm$, dann setze i gleich dem größten Index der in X vorkommenden Variablen, und betrachte mögliche Belegungen von p_{i+1}.

6.3 Sei $\vdash_a$ die durch $\{(A, A \to B, B) \mid A, B \in \mathsf{Fm}\}$ erzeugte Deduktionsrelation (*modus ponens*).
Finden Sie eine Menge X von Formeln mit $X^{\vdash_a} \neq \mathsf{Fm}$, so daß jede Obermenge Y von X, für die auch $Y^{\vdash_a} \neq \mathsf{Fm}$, nicht maximal ist.

Hinweis. Das ist eine "rein syntaktische" Aufgabe, der semantische Wahrheits– und Modellbegriff (d. h. die Interpretation der logischen Funktoren in der Formeln) spielt hierbei *überhaupt keine* Rolle.

Hinweis. $Z = \{p_{i+1} \to p_i, p_i \to A_i \mid i \geq 0\}$ und die Folge (A_i) ist eine geeignete Aufzählung der Menge Fm .

Hinweis. Wir haben zunächst $Z^{\vdash_a} = Z$, da der Modus Ponens nirgendwo paßt. Damit überhaupt nichttrivial abgeleitet werden kann, müssen wir Z wenigstens um einige Variablen p_i erweitern. Um wieviele?