Aufgaben zur Logik (26. 4.)

5.2 Zeigen Sie: Wenn $\Gamma \cup \{A\} \models C$ und $\Gamma \cup \{B\} \models C$, dann $\Gamma \cup \{A \vee B\} \models C$.

5.3 Wir betrachten Formeln, die nur die Funktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthalten.
Für eine solche Formel C definieren wir die *duale Formel* C^d durch:

$$\begin{array}{rcll} p^d & = & p & \text{für Variablen } p \\ (A \vee B)^d & = & (A^d \wedge B^d) & \\ (A \wedge B)^d & = & (A^d \vee B^d) & \\ (\neg A)^d & = & \neg(A^d) & \end{array}$$

Zeigen Sie: $\models A \leftrightarrow B$ genau dann, wenn $\models A^d \leftrightarrow B^d$.

7.1 Eine Formelmenge X heißt *Axiomensystem* für eine Formelmenge Y, wenn $\mathsf{Mod}\,(X) = \mathsf{Mod}\,(Y)$. Wenn Y ein endliches Axiomensystem X besitzt, heißt Y *endlich axiomatisierbar*.

Geben Sie ein unendliches Y an, das endlich axiomatisierbar ist.

Zeigen Sie, daß $Y = \{p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots\}$ *nicht* endlich axiomatisierbar ist.

6.3 Sei $\vdash_a$ die durch $\{(A, A \to B, B) \mid A, B \in \mathsf{Fm}\}$ erzeugte Deduktionsrelation (*modus ponens*).
Finden Sie eine Menge X von Formeln mit $X^{\vdash_a} \neq \mathsf{Fm}$, so daß jede Obermenge Y von X, für die auch $Y^{\vdash_a} \neq \mathsf{Fm}$, nicht maximal ist.